Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2020 г.

11 класс

Вариант № 1

1. Четыре лифта небоскреба, отличающиеся цветовой гаммой (красный, синий, зеленый и желтый) движутся в разных направлениях и с разной, но постоянной скоростью. Наблюдая за лифтами, некто включил секундомер, и, глядя на его показания, стал записывать: 36-я секунда – красный лифт догнал синий (двигаясь с ним в одном направлении). 42-я секунда – красный лифт разминулся с зеленым (двигаясь в разных направлениях), 48-я секунда – красный лифт разминулся с желтым, 51-я секунда – желтый лифт разминулся с синим, 54-я секунда – желтый лифт догнал зеленый лифт. На какой секунде от начала отсчета зеленый лифт разминется с синим, если за период наблюдения лифты не останавливались и не меняли направления движения? (12 баллов)

2. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{3f(1)+6f(0)-f(-1)}{f(0)-f(-2)}$, если $f(x)=ax^2+bx+c$ – произвольная квадратичная функция, удовлетворяющая условию $b>2a$ и принимающая неотрицательные значения при всех действительных x. (12 баллов)

3. Найдите все натуральные числа n, для которых число $2^{10}+2^{13}+2^{14}+3\cdot 2^n$ является квадратом натурального числа. (16 баллов)

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса $AD.$ Известно, что центры вписанной в треугольник ABD и описанной около треугольника ABC совпадают. Найдите $CD,$ если $AC=\sqrt{5}+1.$ Ответ не должен включать обозначения тригонометрических функций и обратных к ним. (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра b, при котором для любого значения параметра $a\in[-2;1]$ неравенство $a^2+b^2-\sin^2 2x-2(a+b)\cos 2x-2>0$ не выполняется хотя бы для одного значения x. (20 баллов)

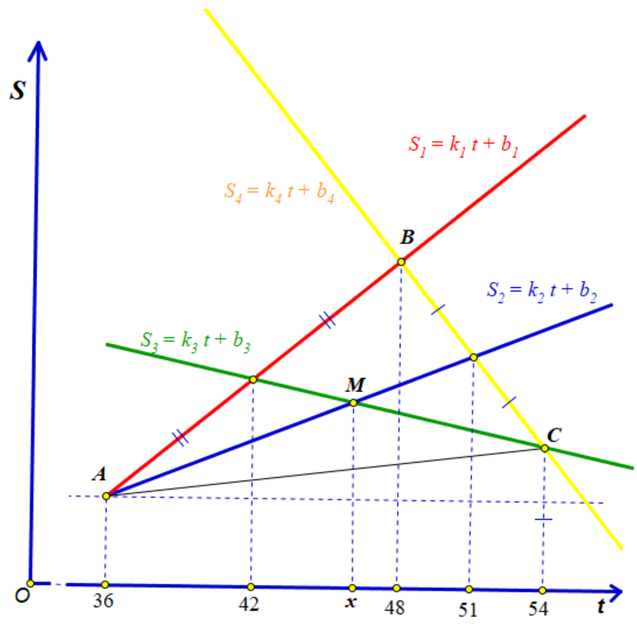
6. Основанием пирамиды $TABCD$ является ромб $ABCD$. Высота пирамиды TK равна 1, точка K лежит на прямой, содержащей диагональ основания AC, причем KC = KA + AC. Боковое ребро TC равно $2\sqrt{2}$, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углами $30°$ и $60°$. Найдите длину стороны основания и угол между боковым ребром TA и плоскостью боковой грани TCD. (20 баллов)

Решение варианта №1

1. Четыре лифта небоскреба, отличающиеся цветовой гаммой (красный, синий, зеленый и желтый) движутся в разных направлениях и с разной, но постоянной скоростью. Наблюдая за лифтами, некто включил секундомер, и, глядя на его показания, стал записывать: 36-я секунда – красный лифт догнал синий (двигаясь с ним в одном направлении). 42-я секунда – красный лифт разминулся с зеленым (двигаясь в разных направлениях), 48-я секунда – красный лифт разминулся с желтым, 51-я секунда – желтый лифт разминулся с синим, 54-я секунда – желтый лифт догнал зеленый лифт. На какой секунде от начала отсчета зеленый лифт разминется с синим, если за период наблюдения лифты не останавливались и не меняли направления движения? (12 баллов)

Решение. Занумеруем лифты: красный – первый, синий – второй, зеленый третий, желтый – четвертый. Лифты движутся с постоянными скоростями, следовательно, для каждого лифта пройденное расстояние S_i, $i=1, 2, 3, 4,$ в некоторой системе координат зависит от времени по закону $S_i = k_i t + b_i$. По условию задачи красный и синий лифт движутся в одном направлении, причем красный догоняет синий, следовательно, $k_1 \cdot k_2 > 0, k_1 > k_2$. Для определенности пусть $k_1 > 0$, Тогда и $k_2 > 0$. Зеленый и желтый лифты движутся в противоположном направлении с двумя первыми, и желтый догоняет зеленый, следовательно, $k_3 < 0, \quad k_4 < 0, \quad k_3 < k_4$. Построим графики функций $S_i(t)$, согласно условию задачи. Нужно определить абсциссу точки M пересечения второго графика с третьим. Точка M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Отсюда имеем

$$\frac{x-36}{51-x} = \frac{2}{1}, \quad x = 46.$$



Ответ: на 46 секунде.

2. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{3f(1)+6f(0)-f(-1)}{f(0)-f(-2)}$, если $f(x) = ax^2 + bx + c$ – произвольная квадратичная функция, удовлетворяющая условию $b > 2a$ и принимающая неотрицательные значения при всех действительных x. (12 баллов)

Решение. Имеем $f(1) = a+b+c,\quad f(0) = c,\quad f(-1) = a-b+c,\ f(-2) = 4a-2b+c,$

$$\frac{3f(1)+6f(0)-f(-1)}{f(0)-f(-2)} = \frac{3(a+b+c)+6c-a+b-c}{c-4a+2b-c} = \frac{2a+4b+8c}{2b-4a} = \frac{a+2b+4c}{b-2a}.$$

Поскольку $f(x) = ax^2 + bx + c$ – произвольная квадратичная функция, принимающая неотрицательные значения при всех действительных x, то $a > 0, \quad D = b^2 - 4ac \le 0 \quad \Rightarrow \quad c \ge b^2/4a$.

Тогда $\dfrac{a+2b+4c}{b-2a} \geq \dfrac{a+2b+b^2/a}{b-2a} = \dfrac{a(1+2b/a+b^2/a^2)}{a(b/a-2)} = \dfrac{t^2+2t+1}{t-2} = \dfrac{(t+1)^2}{t-2}$, где $t = b/a$, $t > 2$.

Рассмотрим функцию $g(t) = \dfrac{(t+1)^2}{t-2}$ и найдем ее наименьшее значение при $t > 2$.

$g'(t) = \dfrac{2(t+1)(t-2)-(t+1)^2}{(t-2)^2} = \dfrac{(t+1)(2(t-2)-(t+1))}{(t-2)^2} = \dfrac{(t+1)(t-5)}{(t-2)^2}$, при $t=5$ производная $g'(t)$ равна 0 и, проходя через эту точку, меняет знак с «минуса» на «плюс», следовательно, $t_{\min}=5$, $g_{\min}=g(5)=12$.

Ответ: 12.

3. Найдите все натуральные числа n, для которых число $2^{10}+2^{13}+2^{14}+3\cdot 2^n$ является квадратом натурального числа. (16 баллов)

Решение.

1) Пусть $n<10$. $N=2^{10}+2^{13}+2^{14}+3\cdot 2^n = 2^n(2^{10-n}+2^{13-n}+2^{14-n}+3)$, второй сомножитель – нечетное число, $2^n=(2^k)^2$, $n=2k$.

Если $n=2$, то $N=2^2(2^8+2^{11}+2^{12}+3)=2^2\cdot 6403$ не является квадратом натурального числа.

Если $n=4$, то $N=2^4(2^6+2^9+2^{10}+3)=2^4\cdot 1603$ не является квадратом натурального числа.

Если $n=6$, то $N=2^6(2^4+2^7+2^8+3)=2^6\cdot 403$ не является квадратом натурального числа.

Если $n=8$, то $N=2^8(2^2+2^5+2^6+3)=2^8\cdot 103$ не является квадратом натурального числа.

2) Пусть $n=10$. Тогда $N=2^{10}+2^{13}+2^{14}+3\cdot 2^{10}=2^{12}(1+2+4)$ не является квадратом натурального числа. Пусть $n=11$. Тогда $N=2^{10}+2^{13}+2^{14}+3\cdot 2^{11}=2^{10}\cdot 31$ не является квадратом натурального числа. Пусть $n=12$. Тогда $N=2^{10}+2^{13}+2^{14}+3\cdot 2^{12}=2^{10}\cdot 37$ не является квадратом натурального числа.

3) Пусть $n>12$. Тогда $N=2^{10}(1+2^3+2^4+3\cdot 2^{n-10})=2^{10}\cdot(2k+1)^2$, и $25+3\cdot 2^{n-10}=4k^2+4k+1$,

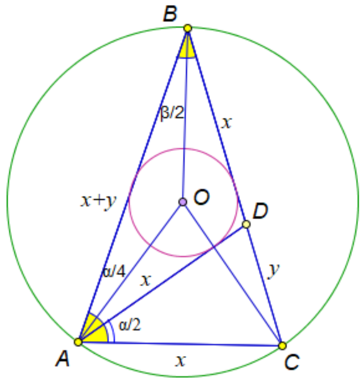
$3\cdot 2^{n-10}=4k^2+4k-24$, $3\cdot 2^{n-12}=k^2+k-$ $3\cdot 2^{n-12}=(k+3)(k-2)$, Числа $k+3$ и $k-2$ разной четности, следовательно, одно из них является делителем 3. Поскольку $k>0$, то либо $k-2=1$, $k=3$, $3\cdot 2^{n-12}=6$, $n=13$, либо $k-2=3$, $k=5$, $3\cdot 2^{n-12}=24$, $n=15$.

Ответ: 13, 15.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Известно, что центры вписанной в треугольник ABD и описанной около треугольника ABC совпадают. Найдите CD, если $AC=\sqrt{5}+1$. Ответ не должен включать обозначения тригонометрических функций и обратных к ним. (20 баллов)

Решение: Пусть $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$. Точка O – центр вписанной в треугольник ABD окружности. $\angle BAO=\alpha/4$, $\angle ABO=\beta/2$. Поскольку O – центр описанной в около треугольника ABC окружности, то треугольник AOB равнобедренный, и $\angle BAO=\angle ABO$, $\beta=\alpha/2$. Треугольники AOC

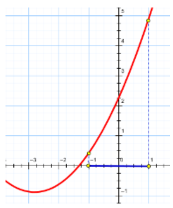
и BOC равнобедренные, и $\angle ACO = 3\alpha/4$, $\angle BCO = \alpha/4$. Поскольку $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, то $\alpha + \alpha/2 + 3\alpha/4 + \alpha/4 = 180°$, и $\alpha = 72°$. Треугольник ABC равнобедренный, $\angle A = \angle C = 72°$, $\angle B = 36°$.
Пусть $AC = x$, $CD = y$. Треугольники ABC и CAD подобны,
$\dfrac{x}{y} = \dfrac{x+y}{x}$, $x^2 - xy - y^2 = 0$.
По условию $x = \sqrt{5} + 1$, $y = x(\sqrt{5} - 1)/2$, $y = 2$.
Ответ: 2.



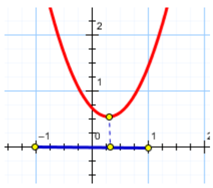
5. Найдите все значения параметра b, при котором для любого значения параметра $a \in [-2;1]$ неравенство $a^2 + b^2 - \sin^2 2x - 2(a+b)\cos 2x - 2 > 0$ не выполняется хотя бы для одного значения x.
(20 баллов)

Решение: Сделаем замену $y = \cos 2x$, $y \in [-1;1]$. Получаем
$a^2 + b^2 - 1 + y^2 - 2(a+b)y - 2 > 0$, или $y^2 - 2(a+b)y + a^2 + b^2 - 3 > 0$. Выясним, при каких значениях a и b неравенство $y^2 - 2(a+b)y + a^2 + b^2 - 3 > 0$ выполняется для любого $y \in [-1;1]$. Рассмотрим функцию $f(y) = y^2 - 2(a+b)y + a^2 + b^2 - 3$. Ее графиком является парабола с ветвями, направленными вверх, вершиной в точке с абсциссой $y_0 = a + b$.

1) $\begin{cases} a+b \le -1, \\ f(-1) > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} a+b \le -1, \\ (a+1)^2 + (b+1)^2 > 4. \end{cases}$

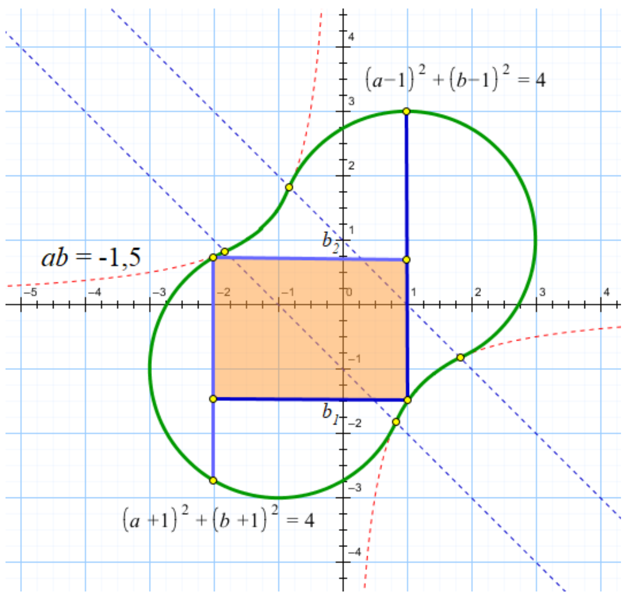


2) $\begin{cases} -1 < a+b < 1, \\ f(a+b) > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} -1 < a+b < 1, \\ ab < -1{,}5. \end{cases}$



3) $\begin{cases} a+b \ge 1, \\ f(1) > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} a+b \ge 1, \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 > 4. \end{cases}$

На координатной плоскости Oab изобразим множество точек $(a;b)$, удовлетворяющих условиям 1-3. Точки, не удовлетворяющие условиям 1-3, это точки, для которых неравенство $y^2 - 2(a+b)y + a^2 + b^2 - 3 > 0$ не выполняется хотя бы для одного $y \in [-1;1]$.
Точки пересечения гиперболы $ab = -1{,}5$ и прямой $a + b = 1$ находим, решая уравнение $t^2 - t - 1{,}5 = 0$.
Получаем точки $((1 \pm \sqrt{7})/2; (1 \mp \sqrt{7})/2)$. Окружность $(a-1)^2 + (b-1)^2 = 4$ пересекается с прямой $a + b = 1$ по тем же точкам (можно проверить подстановкой). Аналогичные рассуждения проводим для второй



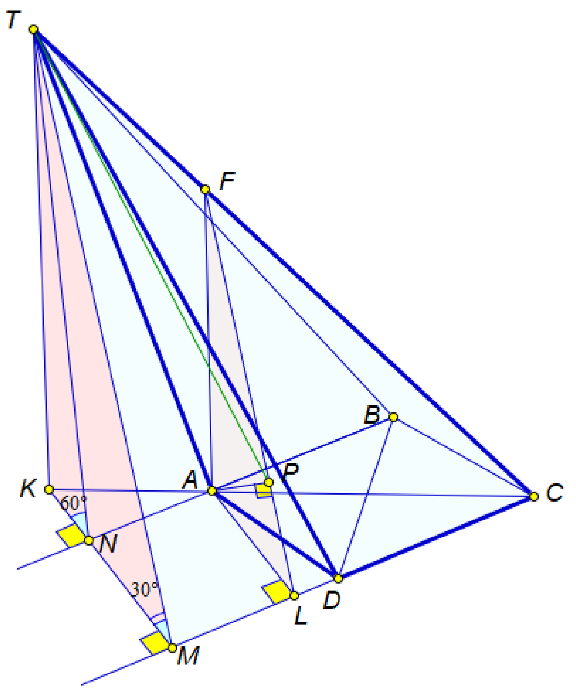
окружности и прямой. В итоге, точки, для которых неравенство $y^2-2(a+b)y+a^2+b^2-3>0$ не выполняется хотя бы для одного $y\in[-1;1]$, образуют замкнутую область, граница которой состоит из графиков двух окружностей и гиперболы, граница включается. Для решения задачи необходимо найти такие значения b, при которых точки $(a;b)$ попадают в получившуюся область для любых $a\in[-2;1]$. Такие значения b образуют отрезок $[b_1;b_2]$. Нижнюю границу b_1 находим, подставляя в уравнение гиперболы $a=1$. Имеем $b_1=-1{,}5$. Верхнюю границу b_2 находим, подставляя в уравнение окружности $(a+1)^2+(b+1)^2=4$ значение $a=-2$. Имеем $b_2=\sqrt{3}-1$.

Ответ: $[-1{,}5;\ \sqrt{3}-1]$.

6. Основанием пирамиды $TABCD$ является ромб $ABCD$. Высота пирамиды TK равна 1, точка K лежит на прямой, содержащей диагональ основания AC, причем KC = KA + AC. Боковое ребро TC равно $2\sqrt{2}$, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углами 30° и 60°. Найдите длину стороны основания и угол между боковым ребром TA и плоскостью боковой грани TCD.

(20 баллов)

Решение:



1) $\begin{matrix} KN\perp AB,\ N=KN\cap AB, \\ KM\perp CD,\ M=KM\cap CD. \end{matrix}$ $KN=\dfrac{TK}{\operatorname{tg}60^\circ}=\dfrac{TK\sqrt{3}}{3}$,

$$KM=\frac{TK}{\operatorname{tg}30^\circ}=TK\sqrt{3},\quad NM=\frac{2\sqrt{3}}{3}TK.$$

$$KC=\sqrt{TC^2-TK^2},$$

$$MC=\sqrt{KC^2-KM^2}=\sqrt{TC^2-4TK^2}.$$

2) $\angle ACD=\alpha,\ \sin\alpha=\dfrac{KM}{KC},\quad \cos\alpha=\dfrac{MC}{KC},$

$$\sin 2\alpha=\frac{2KM\cdot MC}{KC^2},\quad a=AD=\frac{MN}{\sin 2\alpha},$$

$$a=\frac{TK\cdot KC^2}{\sqrt{3}KM\cdot MC}=\frac{TC^2-TK^2}{3\sqrt{TC^2-4TK^2}}=\frac{7}{6}.$$

3) $AF\parallel TK,\quad F\in TC,\quad KA:AC=1:2,\quad FA=\dfrac{2TK}{3}.$

$$AL\perp MC,\quad L\in MC,\quad AL=MN=\frac{2\sqrt{3}}{3}TK,\quad FL=\sqrt{FA^2+AL^2}=\frac{4}{3}TK.$$

$AP\perp FL,\quad AP\perp TDC,\ TP$ - проекция TA на плоскость TDC, угол ATP - искомый угол. $\angle ATP=\varphi$,

$$\sin\varphi=\frac{AP}{TA}=\frac{\sqrt{3}TK}{3\sqrt{TK^2+AK^2}}=\frac{\sqrt{3}TK}{\sqrt{8TK^2+TC^2}}=\frac{\sqrt{3}TK}{\sqrt{8TK^2+TC^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4},\ \varphi=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{7}{6},\quad \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.