Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2020 г.

10 класс

Вариант № 5

1. Для химических опытов взяли две одинаковые пробирки, в которых налито жидкое вещество по 200 мл в каждой. Из первой пробирки вылили 1/4 содержимого и добавили такое же количество воды, затем процедуру повторили еще 3 раза, каждый раз выливая четверть содержимого пробирки и доливая такое же количество воды. Аналогичную процедуру провели дважды для второй пробирки, выливая каждый раз некоторое количество содержимого пробирки и доливая такое же количество воды. В итоге концентрация полученных смесей в первой и второй пробирках стало относиться друг к другу как 9/16. Определите, какое количество смеси отливали каждый раз из второй пробирки. (12 баллов)

2. Найдите остаток от деления на 11 числа A:

$$A=\frac{-2^1+2^2-2^3+\ldots-2^9+2^{10}}{2^{-1}-2^{-2}+2^{-3}+\ldots+2^{-9}-2^{-10}}.$$

(12 баллов)

3. Решите неравенство

$$\frac{\left(|x+1|-|x-1|\right)\left(x^3-7x^2+36\right)}{x^8+2x^6-6x^4+2x^2+1}\geq 0.$$

(16 баллов)

4. Решите уравнение

$$\sqrt{x+\sqrt{x}-\frac{71}{16}}-\sqrt{x+\sqrt{x}-\frac{87}{16}}=\frac{1}{2}.$$

(20 баллов)

5. При каких значениях параметра а уравнение

$$(x^2-a)^2+2(x^2-a)+(x-a)+2=0$$

имеет ровно одно решение. Укажите решение при найденных значениях параметра а. (20 баллов)

6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C длина биссектрисы угла A равна 4, угол $A=60^0$. На серединном перпендикуляре к катету CB в точке Q лежит центр окружности, которая касается прямых AC и AB в точках K и M соответственно. Найдите площадь треугольника OQM, где точка O - центр вписанной в треугольник ABC окружности. (20 баллов)

Решение варианта 5

1. Для химических опытов взяли две одинаковые пробирки, в которых налито жидкое вещество по 200 мл в каждой. Из первой пробирки вылили ¼ содержимого и добавили такое же количество воды, затем процедуру повторили еще 3 раза, каждый раз выливая четверть содержимого пробирки и доливая такое же количество воды. Аналогичную процедуру провели дважды для второй пробирки, выливая каждый раз некоторое количество содержимого пробирки и доливая такое же количество воды. В итоге концентрация полученных смесей в первой и второй пробирках стало относиться друг к другу как 9/16. Определите, какое количество смеси отливали каждый раз из второй пробирки. (12 баллов)

Решение. Первоначальное количество вещества – *V*. После того, как a часть вылили, концентрация вещества в пробирке стала $\frac{V-a}{V}$, после второго раза концентрация - $\left(\frac{V-a}{V}\right)^2$, после четвертого - $\left(\frac{V-a}{V}\right)^4$. Подставив данные задачи, получим отношение $\left(\frac{200-50}{200}\right)^4 : \left(\frac{200-x}{200}\right)^2 = \frac{9}{16}$, или $\left(\frac{3}{4}\right)^4 : \left(\frac{200-x}{200}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^2 : \left(\frac{200-x}{200}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{200-x}{200} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow x = 50$

Ответ: 50 мл.

2. Найдите остаток от деления на 11 числа А:

$$A = \frac{2^1 - 2^2 + 2^3 - \ldots + 2^9 - 2^{10}}{-2^{-1} + 2^{-2} - 2^{-3} + \ldots - 2^{-9} + 2^{-10}}$$

(12 баллов)

Решение. $$A = \frac{2^1 - 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9 - 2^{10}}{-2^{-1} + 2^{-2} - 2^{-3} + \ldots - 2^{-9} + 2^{-10}} = \frac{2^{11}(2^{-10} - 2^{-9} + 2^{-8} - \ldots + 2^{-2} - 2^{-1})}{-2^{-1} + 2^{-2} - 2^{-3} + \ldots - 2^{-9} + 2^{-10}} = 2^{11}.$$

По теореме Ферма $a^p \equiv a(\mathrm{mod}\, p)$, если p - простое число. Следовательно, $2^{11} \equiv 2(\mathrm{mod}\, 11)$, т.е. остаток от деления на 11 числа А равен 2.

Ответ: 2.

3. Решите неравенство $$\frac{\left(|x+1|-|x-1|\right)\left(x^3-7x^2+36\right)}{x^8+2x^6-6x^4+2x^2+1} \geq 0$$ (16 баллов)

Решение. Перегруппируем слагаемые в знаменателе:

$x^8+2x^6-6x^4+2x^2+1 = x^8-2x^4+1+2x^6-4x^4+2x^2 = (x^4-1)^2+2x^2(x^2-1)^2 \geq 0$, найдем нули числителя и домножим дробь на положительную величину, - получим $\frac{\left(|x+1|^2-|x-1|^2\right)(x+2)(x-3)(x-6)}{((x^2+1)^2+2x^2)(x^2-1)^2\left(|x+1|+|x-1|\right)} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(4x)(x+2)(x-3)(x-6)}{(x^2-1)^2} \geq 0$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [0;1) \cup (1; 3] \cup [6; +\infty)$.

4. Решите уравнение $$\sqrt{x+\sqrt{x}-\frac{71}{16}}-\sqrt{x+\sqrt{x}-\frac{87}{16}}=\frac{1}{2}.$$ (20 баллов)

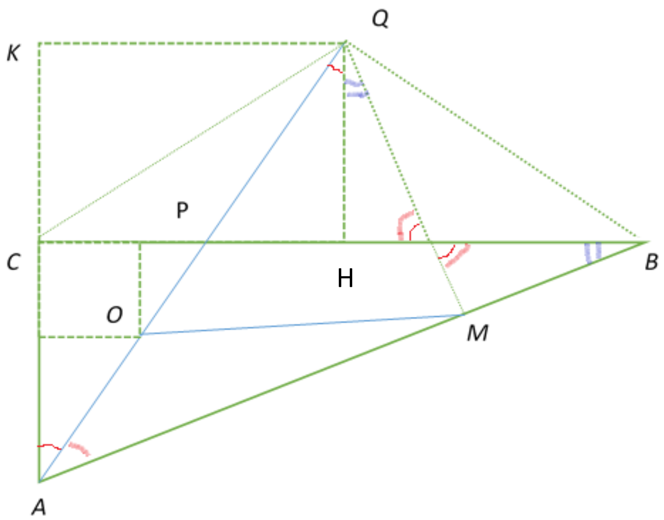
Решение. Учтем, что x неотрицателен, и сделаем замену переменных $u=\sqrt{x+\sqrt{x}-\frac{71}{16}},\ \ v=\sqrt{x+\sqrt{x}-\frac{87}{16}},\ u\geq 0,\ v\geq 0.$

Тогда получим систему $\begin{cases} u-v=1/2, \\ u^2-v^2=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u-v=1/2, \\ u+v=2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=5/4, \\ v=3/4, \end{cases} \Rightarrow$ обратная замена:

$$\begin{cases} x+\sqrt{x}-\dfrac{71}{16}=\dfrac{25}{16}, \\ x+\sqrt{x}-\dfrac{87}{16}=\dfrac{9}{16}. \end{cases} \Rightarrow\ x+\sqrt{x}-6=0\ \Rightarrow\ x=4.$$

Ответ: 4.

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом С длина биссектрисы угла А равна 4, угол $A=60^0$. На серединном перпендикуляре к катету СВ в точке Q лежит центр окружности, которая касается прямых АС и АВ в точках К и М соответственно. Найдите площадь треугольника OQK, где точка О - центр вписанной в треугольник АВС окружности. (20 баллов)



Решение. Точка Q может лежать только за пределами треугольника, т.к. биссектриса AP делит стороны треугольника на пропорциональные сторонам отрезки, а гипотенуза больше катета. $QM=KQ$ как радиусы. $CQ=QB$, т.к. точка Q лежит на серединном перпендикуляре к катету CB. $\triangle OKQ=\triangle OMQ$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, равны и их площади. $S_{OKQ}=1/2\cdot KQ\cdot(r+QH)$, r – радиус вписанной окружности $\triangle ABC$,

$$AP=4\Rightarrow AC=2\sqrt{3},\ \ AB=4\sqrt{3},\ \ CB=6\Rightarrow KQ=3;\ \ CP=2\Rightarrow PH=1,\ \ QH=\sqrt{3},$$

$$S_{OKQ}=1/2\cdot 3\cdot(r+\sqrt{3}),\ \ r=(2\sqrt{3}-r)tg30=(2\sqrt{3}-r)/\sqrt{3}\ \Rightarrow\ r=\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=3-\sqrt{3},$$

$$S_{OKQ}=1/2\cdot 3\cdot(r+\sqrt{3})=9/2.$$

Ответ: 4,5

6. При каких значениях параметра а уравнение $(x^2-a)^2+2(x^2-a)+(x-a)+2=0$ имеет ровно одно решение. Укажите решение при найденных значениях параметра а. (20 баллов)

Решение.

Преобразуем уравнение $(x^2-a)^2+2(x^2-a)+(x-a)+2=0$ к виду $a^2-a\left(2x^2+3\right)+x^4+2x^2+x+2=0.$

Это квадратное уравнение относительно параметра а. Найдем его дискриминант

$$D=(2x^2+3)^2-4(x^4+2x^2+x+2)=(2x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad a=\left[\begin{array}{l} x^2+x+1, \\ x^2-x+2. \end{array}\right.$$

Решим два новых полученных квадратных уравнения относительно переменной х:

$$x^2+x+1-a=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2},$$

$$x^2-x+2-a=0 \quad \Rightarrow \quad x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{4a-7}}{2}.$$

Отметим, что уравнения имеют совпадающие решения при $a=\frac{7}{4}$.

Максимально возможное значение параметра, при котором уравнение имеет 2 корня $a=7/4$, при этом первый корень $x_1=-3/2$, а остальные корни совпадают $x_2=x_3=x_4=1/2.$

Единственное решение $x_1=-1/2$ получается при $a=3/4.$

Ответ: $a=0,75$, $x_1=-0,5.$