Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2020 г.

10 класс

Вариант № 1

1. Автобус с 6 часов утра с постоянной скоростью курсирует между пунктами А и В, причем, доехав до пункта А или В он сразу же поворачивает обратно. Петя на мопеде и Вася на велосипеде одновременно вместе с автобусом в 6 часов утра отправились из пункта А в пункт В, двигаясь при этом с постоянными скоростями. Известно, что автобус во время второго передвижения из пункта А в пункт В в 13 часов 30 минут поравнялся с Васей, и прибыл в пункт В в 15 часов одновременно с Петей. Определите отношение скоростей движения Васи и Пети. Укажите, в котором часу автобус на пути своего первого следования из пункта В в пункт А поравнялся с Васей.

(12 баллов)

2. Найдите все целочисленные решения неравенства

$$x^2y^2+y^2z^2+x^2+z^2-38(xy+z)-40(yz+x)+4xyz+761\leq 0.$$

(12 баллов)

3. Решите неравенство $\dfrac{4x^4+1}{4\sqrt{2}}\leq x\sqrt{x^4-\dfrac{1}{4}}.$

(16 баллов)

4. Докажите, что при любых натуральных значениях n число $5^n(2^{2n}-3^n)+2^n-7^n$ делится нацело на 65.

(20 баллов)

5. Найдите все значения параметра b, при котором для любого значения параметра $a\in[-1;1]$ неравенство $x^2+6x+2(a+b+1)\sqrt{-x^2-6x-5}+8<a^2+b^2+2a$ не выполняется хотя бы для одного $x\in[-5;-1]$.

(20 баллов)

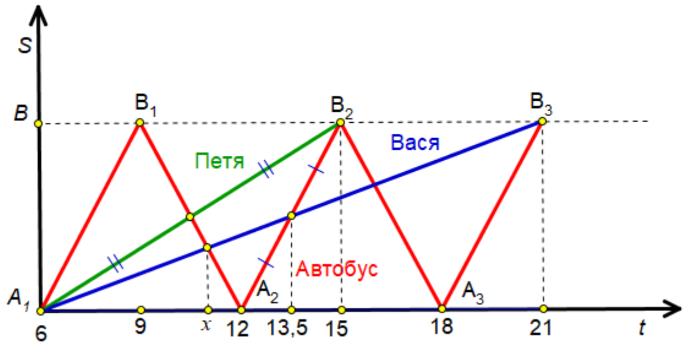
6. Первая окружность с центром в точке О вписана в треугольник $ABC.$ Точки А и В лежат на второй окружности с центром в той же точке О. Прямая AC пересекает вторую окружность в точке D $(D\neq A)$, а прямая BC пересекает вторую окружность в точке Е $(B\neq E).$ Известно, что угол ABC равен углу $CAE.$ Найдите косинус угла $BAC.$ Ответ не должен включать обозначения тригонометрических функций и обратных к ним.

(20 баллов)

Решение варианта №1

1. Автобус с 6 часов утра с постоянной скоростью курсирует между пунктами A и B, причем, доехав до пункта A или B он сразу же поворачивает обратно. Петя на мопеде и Вася на велосипеде одновременно вместе с автобусом в 6 часов утра отправились из пункта A в пункт B, двигаясь при этом с постоянными скоростями. Известно, что автобус во время второго передвижения из пункта A в пункт B в 13 часов 30 минут поравнялся с Васей, и прибыл в пункт B в 15 часов одновременно с Петей. Определите отношение скоростей движения Васи и Пети. Укажите, в котором часу автобус на пути своего первого следования из пункта B в пункт A поравнялся с Васей. (12 баллов)

Решение. Решаем графическим методом. Изобразим все перемещения в координатах t (время) и S (расстояние). Траектория движения Пети из пункта A в пункт B – отрезок A_1B_2. Траектория движения Васи из пункта A в пункт B – отрезок A_1B_3.



Автобус с 6 до 15 часов три раза проехал расстояние AB. Расстояние AB автобус проезжает за 3 часа. Вася поравнялся с автобусом посередине между пунктами A и B. Следовательно, на путь из A в B Вася потратил 15 часов, Петя – 9 часов. Отношение скоростей движения Васи и Пети равно 3:5. Определим, в котором часу автобус на пути своего первого следования из пункта B в пункт A поравнялся с Васей. Обозначим это время за x. Абсцисса точки пересечения медиан треугольника $A_1B_2A_2$ и равна x.

Следовательно, $\dfrac{x-6}{13,5-x}=\dfrac{2}{1}$, $x=11$.

Ответ: 3:5, в 11 часов.

2. Найдите все целочисленные решения неравенства
$x^2y^2+y^2z^2+x^2+z^2-38(xy+z)-40(yz+x)+4xyz+761\le 0.$ (12 баллов)

Решение:

$(x^2y^2+2xyz+z^2)+(y^2z^2+2xyz+x^2)-38(xy+z)-40(yz+x)+761\le 0.$

$(xy+z)^2+(yz+x)^2-38(xy+z)-40(yz+x)+761\le 0,$

$(xy+z)^2-2\cdot 19(xy+z)+361-361+(yz+x)^2-2\cdot 20(yz+x)+400-400+761\le 0,$

$(xy+z-19)^2+(yz+x-20)^2\le 0,\ \begin{cases} xy+z=19,\\ yz+x=20,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+z=19,\\ y(z-x)-(z-x)=20,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+z=19,\\ (z-x)(y-1)=1.\end{cases}$

Поскольку нужно найти целочисленные решения неравенства, то возможны только два случая

1) $\begin{cases} xy+z=19,\\ z-x=1,\\ y=2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+x+1=19,\\ z=x+1,\\ y=2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6,\\ y=2,\\ z=7.\end{cases}$

2) $\begin{cases} xy+z=19, \\ z-x=-1, \\ y=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=19, \\ z=x-1, \\ y=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20, \\ y=0, \\ z=19. \end{cases}$

Ответ: (6; 2; 7), (20; 0; 19).

3. Решите неравенство $\dfrac{4x^4+1}{4\sqrt{2}} \le x\sqrt{x^4-\dfrac{1}{4}}.$ (16 баллов)

Решение. ОДЗ: $x^4-\dfrac{1}{4}\ge 0,\quad x\in(-\infty;-1/\sqrt{2}]\cup[1/\sqrt{2};+\infty)$

1) при $x\in(-\infty;-1/\sqrt{2}]$ неравенство решений не имеет;

2) при $x\in[1/\sqrt{2};+\infty)$ возводим в квадрат обе части неравенства:

$$\frac{16x^8+8x^4+1}{32}\le x^2\left(x^4-\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow 16x^4+8+\frac{1}{x^4}\le 8\left(4x^2-\frac{1}{x^2}\right) \Leftrightarrow \left(4x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+16\le 8\left(4x^2-\frac{1}{x^2}\right).$$

Сделаем замену $t=4x^2-\dfrac{1}{x^2}$. Приходим к неравенству $t^2-8t+16\le 0 \Leftrightarrow (t-4)^2\le 0 \Leftrightarrow t=4.$

После обратной замены имеем $4x^2-\dfrac{1}{x^2}=4,\quad 4x^4-4x^2-1=0,\quad x^2=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2},\quad x=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}.$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

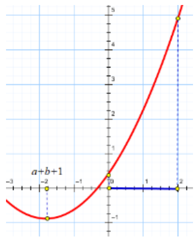
4. Докажите, что при любых натуральных значениях n число $5^n(2^{2n}-3^n)+2^n-7^n$ делится нацело на 65. (20 баллов)

Решение. Докажем, что число $5^n(2^{2n}-3^n)+2^n-7^n$ при любых натуральных значениях n делится нацело на 5:
$20^n-15^n+2^n-7^n=5^n(4^n-3^n)+2^n-(2+5)^n=5^n(4^n-3^n)+2^n-2^n-5k=5^n(4^n-3^n)-5k=5N,$ где N – натуральное число.
Докажем, что число $5^n(2^{2n}-3^n)+2^n-7^n$ при любых натуральных значениях n делится нацело на 13:
$20^n-15^n+2^n-7^n=(13+7)^n-(13+2)^n+2^n-7^n=13k_1+7^n-2^n-13k_2+2^n-7^n=13(k_1-k_2)=13M,$ где M –натуральное число. Число делится нацело на 5 и на 13, следовательно, делится на 65.

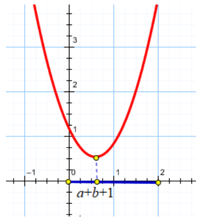
5. Найдите все значения параметра b, при котором для любого значения параметра $a\in[-1;1]$ неравенство $x^2+6x+2(a+b+1)\sqrt{-x^2-6x-5}+8<a^2+b^2+2a$ не выполняется хотя бы для одного значения $x\in[-5;-1]$. (20 баллов)

Решение: Сделаем замену $y=\sqrt{-x^2-6x-5}=\sqrt{4-(x+3)^2},\quad y\in[0;2].$ Получаем $y^2-2(a+b+1)y+a^2+b^2+2a-3>0.$ Выясним, при каких значениях a и b неравенство $y^2-2(a+b+1)y+a^2+b^2+2a-3>0.$ выполняется для любого $y\in[0;2].$ Рассмотрим функцию $f(y)=y^2-2(a+b+1)y+a^2+b^2+2a-3.$ Ее графиком является парабола с ветвями, направленными вверх, вершиной в точке с абсциссой $y_0=a+b+1.$

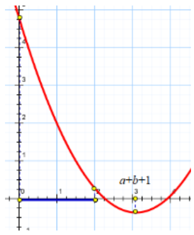
1) $\begin{cases} a+b+1 \le 0, \\ f(0) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a+b \le -1, \\ (a+1)^2 + b^2 > 4. \end{cases}$

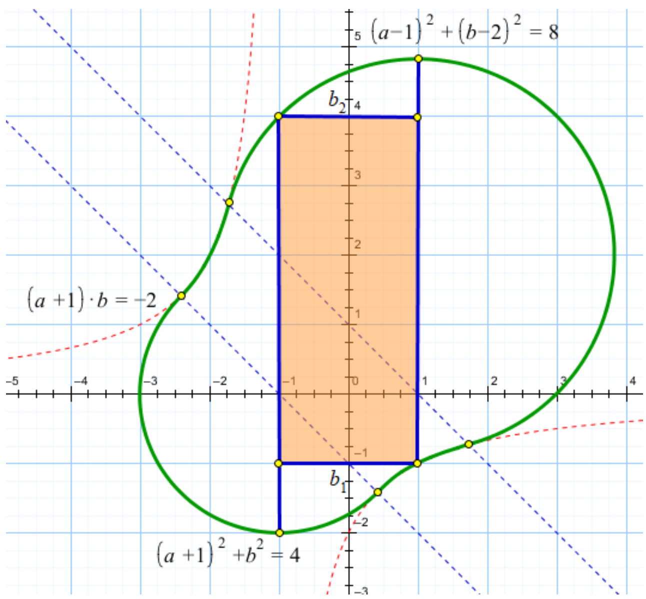


2) $\begin{cases} 0 < a+b+1 < 2, \\ f(a+b+1) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < a+b < 1, \\ (a+1)b < -2. \end{cases}$



3) $\begin{cases} a+b+1 \ge 2, \\ f(2) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a+b \ge 1, \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 > 8. \end{cases}$





На координатной плоскости Oab изобразим множество точек $(a;b)$, удовлетворяющих условиям 1-3. Точки, не удовлетворяющие условиям 1-3, это точки, для которых неравенство $y^2 - 2(a+b+1)y + a^2 + b^2 + 2a - 3 > 0$ не выполняется хотя бы для одного $y \in [0;2]$. Точки пересечения гиперболы $(a+1)b = -2$ и прямой $a+b=-1$ находим, решая уравнение $(a+1)^2 = 2$. Получаем точки $(-1 \pm \sqrt{2}; \mp\sqrt{2})$. Окружность $(a+1)^2 + b^2 = 4$ пересекается с прямой $a+b=-1$ по тем же точкам (можно проверить подстановкой). Аналогичные рассуждения проводим для второй окружности и прямой. В итоге, точки, для которых неравенство $y^2 - 2(a+b)y + a^2 + b^2 - 3 > 0$ не выполняется хотя бы для одного $y \in [0;2]$, образуют замкнутую область, граница которой состоит из графиков двух окружностей и гиперболы, граница включается. Для решения задачи необходимо найти такие значения b, при которых точки $(a;b)$ попадают в получившуюся область для любых $a \in [-1;1]$. Такие значения b образуют отрезок $[b_1; b_2]$. Нижнюю границу b_1 находим, подставляя в уравнение гиперболы $a=1$. Имеем $b_1 = -1$. Верхнюю границу b_2 находим, подставляя в уравнение окружности $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 8$ значение $a=-1$. Имеем $b_2 = 4$.

Ответ: $[-1; 4]$.

6. Первая окружность с центром в точке O вписана в треугольник ABC. Точки A и B лежат на второй окружности с центром в той же точке O. Прямая AC пересекает вторую окружность в точке D $(D \ne A)$, а прямая BC пересекает вторую окружность в точке E $(B \ne E)$. Известно, что угол ABC равен углу CAE. Найдите косинус угла BAC. (20 баллов)

Решение. Точки D и E лежат вне отрезков AC и BC соответственно (рис. 1). В противном случае (см. рис.2) дуга DE является частью дуги AE (и не совпадает с ней), что противоречит условию равенства углов ABC и CAE.

Пусть $\angle ABC = \beta$. Тогда $\angle CAE = \beta$, $\angle CAE = \angle CBD = \beta$. Точка O – центр вписанной в треугольник ABD окружности. $\angle ABO = \beta/2$. Поскольку O – центр описанной в около треугольника ABC окружности, то треугольник AOB равнобедренный, и $\angle BAO = \angle ABO = \beta/2$. AO – биссектриса угла A, следовательно, $\angle OAC = \beta/2$. Треугольники AOD и BOD равнобедренные, и $\angle BDO = 3\beta/2$, $\angle ADO = \beta/2$. Поскольку $\angle A + \angle B + \angle D = 180°$, то $3\beta + 3\beta/2 + \beta/2 = 180°$, и $\beta = 36°$. Треугольник ABD равнобедренный, $\angle B = \angle D = 72°$, $\angle A = 36°$.

Пусть $AC = x$, $CD = y$. Треугольники ABD и CBD подобны, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x+y}{x}$, $x^2 - xy - y^2 = 0$,

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Поскольку $\cos(\angle BAC) = \cos\beta$, то по теореме косинусов для треугольника CBD имеем

$$\cos\beta = \frac{2x^2 - y^2}{2x^2} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4}\cdot\left(3-\sqrt{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

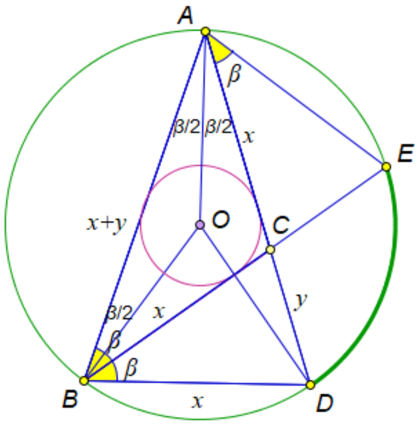


Рис. 1

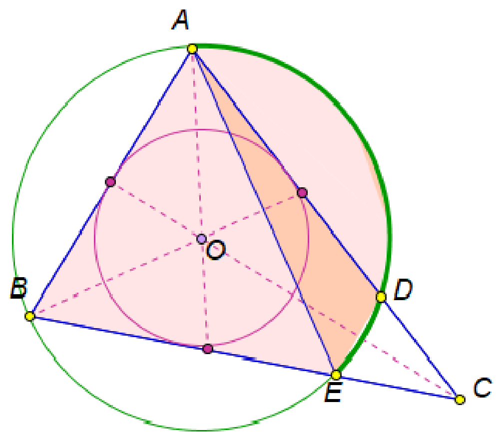


Рис. 2