

Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», осень 2019 г.

9 класс

Вариант № 2

1. (9 баллов) На складе имеется кофе, упакованный в мешки по 15 кг и по 8 кг. Сколько всего мешков с кофе нужно приготовить кладовщику, чтобы отвесить 1998 кг кофе, причём количество мешков с кофе по 8 кг должно быть наименьшим?
2. (9 баллов) Найдите сумму всех целых значений h , при которых уравнение $\|r + h| - r| - 4r = 9|r - 3|$ относительно r имеет не более одного корня.
3. (9 баллов) На выставке собак по жеребьёвке каждой из них достался порядковый номер от 1 до 24. В связи со здоровьем одна из собак не смогла выступить на конкурсе. Оказалось, что среди 23 оставшихся одна имеет номер, равный среднему арифметическому номеров оставшихся собак. Какой порядковый номер имела собака, которая не смогла участвовать в выставке? Если задача имеет не единственное решение, то выпишите в ответ эти номера без пробела в порядке возрастания.
4. (9 баллов) Иван Иванович подошёл к источнику с двумя пустыми канистрами, одна вмещала 10 л, а другая – 8 л. Вода из источника текла двумя струями – одна сильнее, другая слабее. Иван Иванович одновременно подставил канистры под струи и, когда набралась половина меньшей канистры, поменял канистры местами. К удивлению Ивана Ивановича, канистры наполнились одновременно. Во сколько раз больше воды даёт более сильная струя, чем более слабая?
5. (12 баллов) Часы показывают 00:00, при этом часовая и минутная стрелки часов совпадают. Считая это совпадение под номером 0, определите, через сколько времени (в минутах) они совпадут в 21 раз. Ответ округлите до сотых.
6. (12 баллов) В треугольнике ABC с углом $\angle B = 120^\circ$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 . Отрезок A_1B_1 пересекает биссектрису CC_1 в точке M . Найти градусную меру угла B_1BM .
7. (12 баллов) На сторонах AB и AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle BCA = 90^\circ$), внешним образом построены прямоугольные треугольники ABT и ACK , так что $\angle ATB = \angle AKC = 90^\circ$, $\angle ABT = \angle ACK = 60^\circ$, на стороне BC выбрана точка M так, что $BM = MC$. Определите градусную меру угла KMT .
8. (14 баллов) Прямоугольные треугольники MDC и ADK имеют общий прямой угол D . Точка K принадлежит CD и делит ее в отношении 2:3, считая от точки C . Точка M - середина стороны AD . Найти сумму градусных мер углов AKD и MCD , если $AD : CD = 2 : 5$.
9. (14 баллов) Студент-химик провел эксперимент: из бутылки, наполненной раствором сиропа вылил один литр жидкости, долил бутылку водой, потом опять вылил один литр жидкости и опять долил бутылку водой. В результате процентное содержание сиропа снизилось с 36 до 1 процента. Определить объем бутылки в литрах.

Решение варианта № 2

1. На складе имеется кофе, упакованный в мешки по 15 кг и по 8 кг. Сколько всего мешков с кофе нужно приготовить кладовщику, чтобы отвесить 1998 кг кофе, причём количество мешков с кофе по 8 кг должно быть наименьшим?

Решение. Пусть x – количество мешков по 15 кг, y – количество мешков по 8 кг. Получим уравнение $15x + 8y = 1998$.

$$8(x+y) + 7x = 1998, \text{ обозначим } x+y=k, \quad (1)$$

$$8k + 7x = 1998,$$

$$7(k+x) + k = 1998, \text{ обозначим } k+x=t, \quad (2)$$

$$7t + k = 1998,$$

$$k = 1998 - 7t. \text{ Подставим в (2), } x = 8t - 1998.$$

$$\text{Подставим в (1), } y = 2 \cdot 1998 - 15t.$$

Так как $x > 0$, $y > 0$, то $250 \leq t \leq 266$. Чтобы мешков с кофе по 8 кг было наименьшим числом, то $t = 266$. Тогда соответственно $x = 130$, $y = 6$.

130 и 6 мешков, всего 136 мешков.

Ответ: 136.

2. Найдите сумму всех целых значений h , при которых уравнение $\|r + h| - r| - 4r = 9|r - 3|$ относительно r имеет не более одного корня.

Решение. Рассмотрим функцию $f(r) = 9|r - 3| - \|r + h| - r| + 4r$. Коэффициент при первом модуле больше суммы модулей остальных коэффициентов при r ($9 > 1 + 1 + 4$). Отсюда следует, что на всех интервалах до $r = 3$ коэффициент в линейном выражении отрицателен, а после $r = 3$ – положителен, $r = 3$ – точка минимума. Для того, чтобы уравнение $f(r) = 0$ имело не более одного корня необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство: $f(3) \geq 0$. Решим неравенство.

$$\text{Обозначим } |3 + h| = t, \text{ получим } 12 - |t - 3| \geq 0, (t - 3)^2 - 12^2 \leq 0,$$

$$(t - 15)(t + 9) \leq 0, t \in [-9; 15], |h + 3| \leq 15, h \in [-18; 12],$$

сумма целых значений h : -93 .

Ответ: -93 .

3. На выставке собак по жеребьёвке каждой из них достался порядковый номер от 1 до 24. В связи со здоровьем одна из собак не смогла выступить на конкурсе. Оказалось, что среди 23 оставшихся одна имеет номер, равный среднему арифметическому номеров оставшихся собак. Какой порядковый номер имела собака, которая не смогла участвовать в выставке? Если задача имеет не единственное решение, то выпишите в ответ эти номера без пробела в порядке возрастания.

Решение. Сумма номеров по жеребьёвке, первоначально равная $1 + 2 + 3 + \dots + 24 = 300$ и уменьшившаяся на зачеркнутое число, заключена в пределах от $300 - 24 = 276$ до $300 - 1 = 299$. Она, кроме того, кратна 23, поскольку в 23 раза больше одного из слагаемых. А так, как из чисел 276, 277, 278, ..., 299 только числа 276 и 299 кратны 23, то номер выбывшей собаки либо число $24 = 300 - 276$, либо $1 = 300 - 299$. В обоих случаях среднее арифметическое номеров собак, оставшихся в конкурсе, не совпадает с номером выбывшей собаки.

Ответ: 124.

4. Иван Иванович подошёл к источнику с двумя пустыми канистрами, одна вмещала 10 л, а другая – 8 л. Вода из источника текла двумя струями – одна сильнее, другая слабее. Иван Иванович одновременно подставил канистры под струи и, когда набралась половина меньшей канистры, поменял канистры местами. К удивлению Ивана Ивановича, канистры наполнились одновременно. Во сколько раз больше воды даёт более сильная струя, чем более слабая?

Решение. Пусть в большую канистру налил x л воды, пока в меньшую 4 л. После перестановки в большую налил $(10 - x)$ л, а в меньшую снова 4 л. Так как мощности струй постоянны, отношения объёмов воды, налившейся за одно и то же время, тоже постоянно. Составим уравнение:

$$\frac{4}{x} = \frac{10 - x}{4}; \quad x^2 - 10x + 16 = 0, \quad \text{которое имеет два корня } x_1 = 2, x_2 = 8. \quad \text{Два корня уравнения}$$

соответствуют двум возможностям: подставить сначала меньшую канистру под более мощную или под более слабую струю. Но в обоих случаях ответ получается один и тот же: одна струя даёт в 2 раза больше воды, чем другая.

Ответ. 2.

5. Часы показывают 00:00, при этом часовая и минутная стрелки часов совпадают. Считая это совпадение под номером 0, определите, через сколько времени (в минутах) они совпадут в 21 раз. Ответ округлите до сотых.

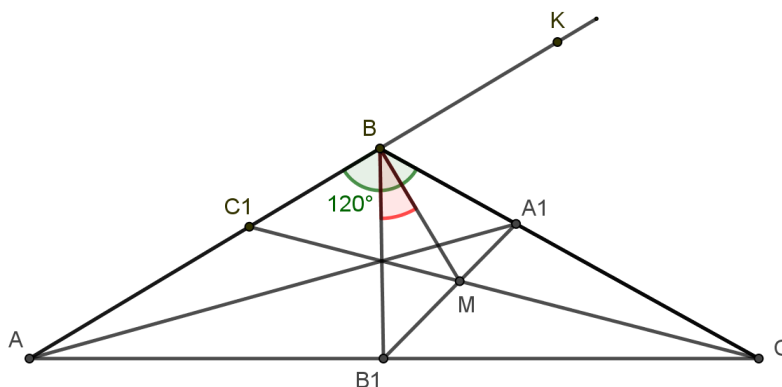
Решение. Минутная стрелка проходит за час 1 круг, а часовая $1/12$ круга, значит скорость их сближения $11/12$ круга в час, одно сближение занимает $1/(11/12) = 12/11$ часа или $720/11$ минут. 21

$$\text{сближение произойдет через } 21 \cdot \frac{720}{11} = \frac{15120}{11} \text{ минут.}$$

Ответ: 1374,55.

6. В треугольнике ABC с углом $\angle B = 120^\circ$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 . Отрезок A_1B_1 пересекает биссектрису CC_1 в точке M . Найти градусную меру угла B_1BM .

Решение.



Продолжим сторону AB за точку B , тогда BC биссектриса угла $\angle B_1BK$, а значит точка A_1 равноудалена от сторон B_1B и BK . Учитывая, что точка A_1 лежит на биссектрисе $\angle BAC$, а

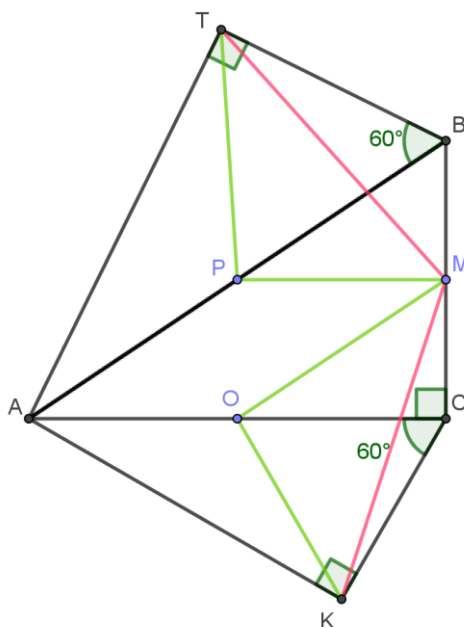
значит и равноудалена от его сторон получаем, что A_1 равноудалена от сторон B_1B и B_1C , а значит лежит на биссектрисе $\angle BB_1C$. Таким образом, B_1A_1 - биссектриса $\angle BB_1C$.

В треугольнике BB_1C точка M - точка пересечения биссектрис B_1A_1 и CC_1 , а значит, и BM тоже биссектриса $\angle B_1BC$, следовательно $\angle B_1BM = \angle MBC = 30^\circ$.

Ответ: 30.

7. На сторонах AB и AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle BCA = 90^\circ$), внешним образом построены прямоугольные треугольники ABT и ACK , так что $\angle ATB = \angle AKC = 90^\circ$, $\angle ABT = \angle ACK = 60^\circ$, на стороне BC выбрана точка M так, что $BM=MC$. Определите градусную меру угла KMT .

Решение. На серединах сторон AB и AC отметим точки P и O , соответственно. Соединим точку P с точками M и T , а точку O с точками K и M .



Тогда: 1) $\triangle TPM = \triangle KOM$, по двум сторонам и углу между ними, так как

$$AO = \frac{1}{2} AC = KO = PM,$$

$$AP = \frac{1}{2} AB = TP = OM,$$

$$\angle TPM = \angle TPB + \angle BPM = \angle COK + \angle COM = \angle KOM,$$

Значит $TM=MK$, $\angle PTM = \angle KMO$ и $\angle PMT = \angle MKO$.

2) Найдём сумму углов $\angle PMT$ и $\angle KMO$:

$$\angle PMT + \angle KMO = \angle MKO + \angle KMO = 180^\circ - \angle MOK.$$

В свою очередь $\angle MOK = \angle KOC + \angle MOC = 60^\circ + \angle BAC$.

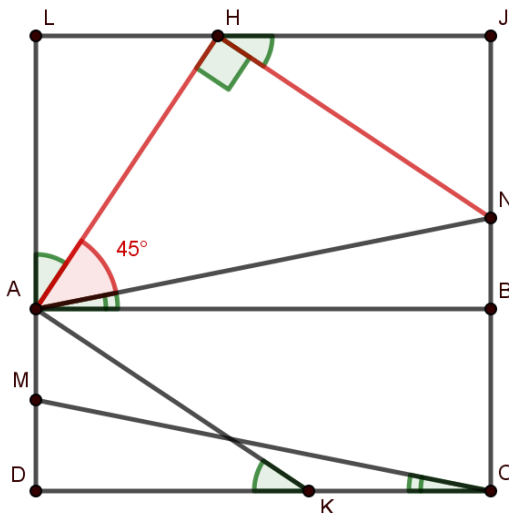
3) $\angle KMT = \angle PMO + (\angle PMT + \angle KMO) = \angle BAC + (180^\circ - \angle MOK) \Rightarrow$

$$\angle KMT = \angle BAC + 180^\circ - 60^\circ - \angle BAC = 120^\circ.$$

Ответ: 120.

8. Прямоугольные треугольники MDC и ADK имеют общий прямой угол D . Точка K принадлежит CD и делит ее в отношении 2:3, считая от точки C . Точка M - середина стороны AD . Найти сумму градусных мер углов AKD и MCD , если $AD:CD = 2:5$.

Решение. Достроим треугольник ADC до квадрата $LJCD$.



Выберем точку H на стороне LJ , такую что $LH:HJ = 2:3$, точку N на стороне CJ , такую что $CN:NJ = 3:2$ и точку B на стороне CJ , такую что $CB:BJ = 2:3$. Получаем равные треугольники: $\triangle AKD = \triangle ALH = \triangle HJN$.

Далее, $AH = HN$, $\angle AHN = 90^\circ$, следовательно, $\angle HAN = 45^\circ$. Из равенства треугольников MDC и NAB , получаем $\angle NAB = \angle MCD$.

Далее, $\angle LAB = \angle LAH + \angle HAN + \angle NAB = 90^\circ$.

Откуда, уже окончательно, $\angle LAH + \angle NAB = \angle AKD + \angle MCD = 45^\circ$.

Ответ: 45.

9. Студент-химик провел эксперимент: из бутылки, наполненной раствором сиропа вылил один литр жидкости, долил бутылку водой, потом опять вылил один литр жидкости и опять долил бутылку водой. В результате процентное содержание сиропа снизилось с 36 до 1 процента. Определить объем бутылки в литрах.

Решение.

1) Пусть x - объем бутылки в литрах.

2) Тогда после отлития одного литра жидкости осталось $(x-1)$ литров раствора, а в нем

$(x-1) \cdot \frac{36}{100}$ литров сиропа и $(x-1) \cdot \frac{64}{100}$ литров воды.

3) После того как долили один литр воды в бутылки стало: x литров раствора, а в нем

$(x-1) \cdot \frac{36}{100}$ литров сиропа и $(x-1) \cdot \frac{64}{100} + 1$ литров воды.

4) В конце всех переливаний в бутылки стало: x литров раствора, а в нем $x \cdot \frac{1}{100}$ литров сиропа и $x \cdot \frac{99}{100}$ воды.

5) Тогда до последнего долития литра воды в бутылки было $(x-1)$ литров раствора, а в нем $x \cdot \frac{1}{100}$ литров сиропа и $x \cdot \frac{99}{100} - 1$ воды. Это та же жидкость, что и в пункте 3) решения, соответственно соотношения жидкости и воды в ней одинаково.

Составим уравнение:

$$\frac{(x-1) \cdot \frac{36}{100}}{x \cdot \frac{1}{100}} = \frac{(x-1) \cdot \frac{64}{100} + 1}{x \cdot \frac{99}{100} - 1} \Leftrightarrow \frac{(x-1) \cdot 36}{x \cdot 1} = \frac{(x-1) \cdot 64 + 100}{x \cdot 99 - 100} \Leftrightarrow$$

$$\frac{36x - 36}{x} = \frac{64x + 36}{99x - 100} \Leftrightarrow (36x - 36)(99x - 100) = x(64x + 36) \Leftrightarrow$$

$$35x^2 - 72x + 36 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1, 2; \frac{6}{7}\right\}. \quad \frac{6}{7} \text{ литров не удовлетворяет условию задачи.}$$

Ответ: 1, 2.