Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2019 г.

9 класс

Вариант № 1

1. *(9 баллов)* Если натуральное двузначное число уменьшить на 54, то получится двузначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. В ответе укажите медиану числового ряда, составленного из всех таких чисел.

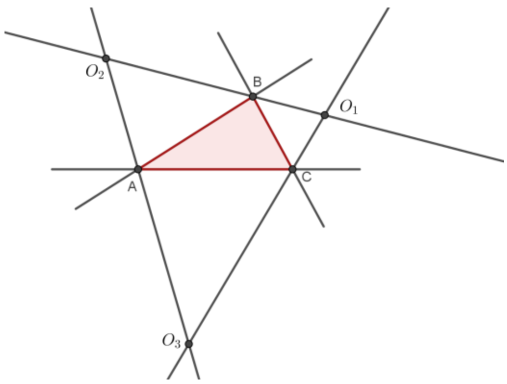
2. *(9 баллов)* Найдите сумму всех целых значений c, при которых уравнение $10|p-3|+|2p-|p+c||=6p$ относительно p имеет хотя бы один корень.

3. *(9 баллов)* На учебных стрельбах каждый из солдат стрелял по 10 раз. Один из них выполнил задание удачно и выбил 90 очков. Сколько раз он выбил 9 очков, если десяток было 4, результатами попаданий были семёрки, восьмёрки и девятки. При этом промахов не было ни одного.

4. *(9 баллов)* Волк увидел косулю в нескольких метрах от себя и погнался за ней по прямой лесной тропе. Прыжок волка на 22% короче прыжка косули. Оба животных прыгают с постоянной скоростью. Все прыжки косули имеют одинаковую длину, прыжки волка тоже равны между собой. Существует промежуток времени, за который и волк и косуля делают по некоторому целому числу прыжков. При этом каждый раз оказывается, что волк сделал на t% прыжков больше, чем косуля. Найдите наибольшее целое значение t, при котором волк не сможет догнать косулю.

5. *(12 баллов)* Илья берёт тройку чисел и преобразует её по правилу: на каждом шаге каждое число заменяется на сумму двух остальных. Чему равна разность между самым большим и самым маленьким числами в тройке на 1989-ем шаге применения этого правила, если изначальная тройка чисел была {70; 61; 20}? Если вопрос задачи допускает несколько вариантов ответа, то выпишите их без пробела в порядке возрастания.

6. *(12 баллов)* Дан треугольник ABC. Прямые O_1O_2, O_1O_3, O_3O_2 - биссектрисы внешних углов треугольника ABC, как показано на рисунке. Точка O - центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найти угол в градусах между прямыми O_1O_2 и OO_3.



7. *(12 баллов)* Дана прямоугольная трапеция ABCE, основания которой BC и AE равны 3 и 4, соответственно. Меньшая боковая сторона AB равна BC. На AE отмечена точка D так, что AD:DE=3:1; на AD отмечена точка F так, что AF:FD=2:1; на BD отмечена точка G так, что BG:GD=1:2. Определите градусную меру угла CFG.

8. *(14 баллов)* В треугольнике ABC с углом $\angle B = 120^0$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок A_1B_1 пересекает биссектрису CC_1 в точке M. Найти градусную меру угла B_1MC_1.

9. *(14 баллов)* Студент-химик провел эксперимент: из бака, наполненного раствором сиропа вылил несколько литров жидкости, долил бак водой, потом вылил в два раза большее количество жидкости и опять долил бак водой. В результате количество сиропа в баке уменьшилось в $\frac{25}{3}$ раза. Определить сколько литров жидкости вылил студент первый раз, если объем бака 1000 литров.

Решение варианта № 1

1. Если натуральное двузначное число уменьшить на 54, то получится двузначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. В ответе укажите медиану числового ряда, составленного из всех таких чисел.

Решение.

Пусть $\overline{xy} = 10x + y$ - исходное двузначное число, тогда $\overline{yx} = 10y + x$ - число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Получим уравнение $10x + y = 10y + x + 54$. Из уравнения видно, что двузначное число больше 54. Начнем исследование с числа десятков равному 6.

x	*уравнение*	*y*	*число*
6	$60+ y = 10y+6+54$	$y = 0$	60 не подходит по условию
7	$70+ y = 10y+7+54$	$y = 1$	71
8	$80+ y = 10y+8+54$	$y = 2$	82
9	$90+ y = 10y+9+54$	$y = 3$	93

Это могут быть числа 71, 82, 93. Медиана ряда равна 82.

Ответ: 82.

2. Найдите сумму всех целых значений c, при которых уравнение $10\left|p-3\right|+\left|2p-\left|p+c\right|\right|=6p$ относительно p имеет хотя бы один корень.

Решение. Рассмотрим функцию $f\left(p\right)=10\left|p-3\right|+\left|2p-\left|p+c\right|\right|-6p.$ Коэффициент при первом модуле больше суммы модулей остальных коэффициентов при p (10>2+1+6). Отсюда следует, что на всех интервалах до $p=3$ коэффициент в линейном выражении отрицателен, а после $p=3$ - положителен, $p=3$ - точка минимума. Для того, чтобы уравнение $f\left(p\right)=0$ имело хотя бы один корень необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство: $f\left(3\right)\le 0.$ Решим неравенство. Обозначим $\left|3+c\right|=t,$ получим $\left|6-t\right|-18\le 0,$ $\left(6-t\right)^2-18^2\le 0,$

$$\left(24-t\right)\left(t+12\right)\ge 0,\ t\in\left[-12;24\right],\ \left|c+3\right|\le 24,\ c\in\left[-27;21\right],$$

сумма целых значений c: $-147.$

Ответ: $-147.$

3. На учебных стрельбах каждый из солдат стрелял по 10 раз. Один из них выполнил задание удачно и выбил 90 очков. Сколько раз он выбил 9 очков, если десяток было 4, результатами попаданий были семёрки, восьмёрки и девятки. При этом промахов не было ни одного.

Решение: Так как солдат выбил 90 очков и 40 из них набрал за 4 раза, то за оставшиеся 6 выстрелов он набрал 50 очков. Поскольку солдат попадал только в семерку, восьмерку и девятку, то пусть за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмёрку и девятку) он набрал 24 очка. Тогда за оставшиеся три выстрела он набрал 26 очков, что возможно только при единственной комбинации чисел 7, 8, 9: 8+9+9=26. Таким образом, в семёрку стрелок попал один раз, в восьмёрку два раза, а в девятку – три раза.

Ответ: 3.

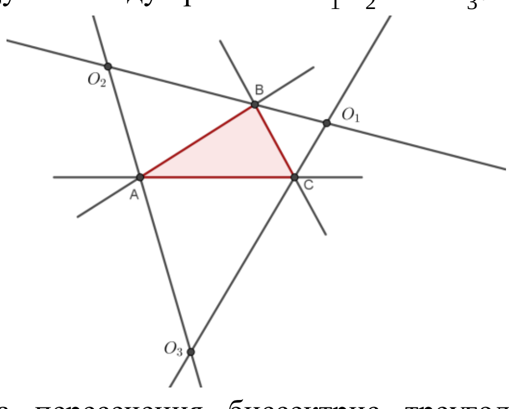
4. Волк увидел косулю в нескольких метрах от себя и погнался за ней по прямой лесной тропе. Прыжок волка на 22% короче прыжка косули. Оба животных прыгают с постоянной скоростью. Все прыжки косули имеют одинаковую длину, прыжки волка тоже равны между собой. Существует промежуток времени, за который и волк и косуля делают по некоторому целому числу прыжков. При этом каждый раз оказывается, что волк сделал на t% прыжков больше, чем косуля. Найдите наибольшее целое значение t, при котором волк не сможет догнать косулю.

Решение: Пусть x – длина прыжка косули, тогда $0,78x$ – длина прыжка волка; y – число прыжков косули за промежуток времени, указанный в условии, $y(1+\frac{t}{100})$ - количество прыжков волка за этот же промежуток времени. Волк не сможет догнать косулю, если путь, преодолеваемый косулей за указанный промежуток времени xy – будет не меньше, чем путь, преодолеваемый волком за тот же промежуток времени: $0,78xy(1+\frac{t}{100})$. Составим неравенство: $0,78xy(1+\frac{t}{100}) \le xy$; $1+\frac{t}{100} \le \frac{50}{39}$; $t \le \frac{1100}{39}$. Максимальное значение t, удовлетворяющее этому неравенству, t = 28%.
Ответ: 28.

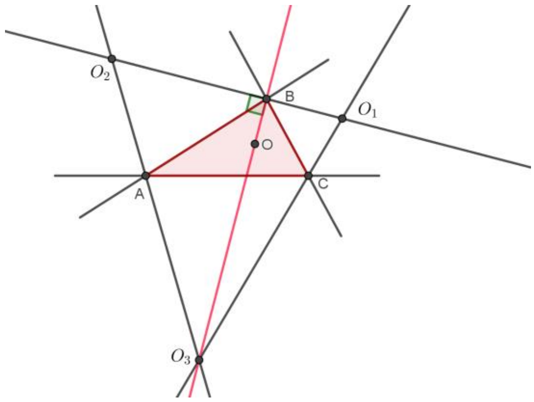
5. Илья берёт тройку чисел и преобразует её по правилу: на каждом шаге каждое число заменяется на сумму двух остальных. Чему равна разность между самым большим и самым маленьким числами в тройке на 1989-ем шаге применения этого правила, если изначальная тройка чисел была {70; 61; 20}? Если вопрос задачи допускает несколько вариантов ответа, то выпишите их без пробела в порядке возрастания.

Решение. Обозначим 3 числа, как {x; x+a; x+b}, где 0<a<b. Тогда разность между самым большим и самым маленьким числом на любом шаге, начиная с нулевого шага, будет инвариантом, то есть неизменной и равняться b.
b=70-20=50.
Ответ: 50.

6. Дан треугольник ABC. Прямые O_1O_2, O_1O_3, O_3O_2 - биссектрисы внешних углов треугольника ABC, как показано на рисунке. Точка O - центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найти угол в градусах между прямыми O_1O_2 и OO_3.



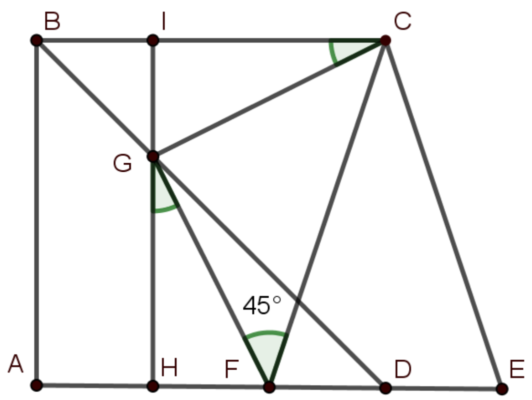
Решение. Точка O - точка пересечения биссектрис треугольника ABC, следовательно, биссектриса BO перпендикулярна прямой O_1O_2 (как биссектрисы смежных углов треугольника).



Точка O_3, как равноудаленная от прямых BA и BC, лежит на BO. Следовательно, прямая OO_3, совпадающая с BO, перпендикулярна прямой O_1O_2.
Ответ: 90.

7. Дана прямоугольная трапеция ABCE, основания которой BC и AE равны 3 и 4, соответственно. Меньшая боковая сторона AB равна BC. На AE отмечена точка D так, что AD:DE=3:1; на AD отмечена точка F так, что AF:FD=2:1; на BD отмечена точка G так, что BG:GD=1:2. Определите градусную меру угла CFG.

Решение. Построим высоту IH так, что $G \in IH$ и соединим точки C и G.



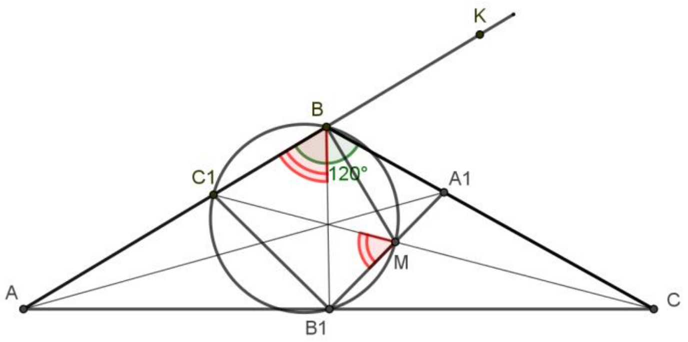
1) $\Delta IGC = \Delta GFH$ - по двум катетам, так как $IC = GH = 2,\ IG = HF = 1,$ поэтому $FG = GC,$ $\angle ICG = \angle FGH = \alpha,$ и $\angle HFG = \angle IGC = 90^0 - \alpha.$
2) ΔFGC - прямоугольный равнобедренный треугольник, так как $FG = FD,$

$$\angle HGF + \angle FGC + \angle IGC = 180^0,$$
$$\angle FGC = 180^0 - \angle HGF - \angle IGC,$$
$$\angle FGC = 180^0 - \alpha - 90^0 + \alpha = 90^0.$$

Значит $\angle CFG = 45^0.$
Ответ: 45.

8. В треугольнике ABC с углом $\angle B = 120^0$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок A_1B_1 пересекает биссектрису CC_1 в точке M. Найти градусную меру угла B_1MC_1.

Решение.



Продолжим сторону AB за точку B, тогда BC биссектриса угла $\angle B_1BK$, а значит точка A_1 равноудалена от сторон B_1B и BK. Учитывая, что точка A_1 лежит на биссектрисе $\angle BAC$, а значит и равноудалена от его сторон получаем, что A_1 равноудалена от сторон B_1B и B_1C, а значит лежит на биссектрисе $\angle BB_1C$. Аналогично доказываем, что B_1C_1 биссектриса $\angle AB_1B$. Следовательно $\angle C_1B_1A_1 = 90^\circ$, как угол между биссектрисами смежных углов.

В треугольнике BB_1C точка M - точка пересечения биссектрис B_1A_1 и CC_1, а значит, и BM тоже биссектриса $\angle B_1BC$, следовательно $\angle B_1BM = \angle MBC = 30^\circ$. Далее, $\angle ABM = \angle C_1BB_1 + \angle B_1BM = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, следовательно, вокруг четырехугольника BMB_1C_1 можно описать окружность. Значит $\angle B_1MC_1 = \angle B_1BC_1 = 60^\circ$, как опирающиеся на одну дугу.

Ответ: 60.

9. Студент-химик провел эксперимент: из бака, наполненного раствором сиропа вылил несколько литров жидкости, долил бак водой, потом вылил в два раза большее количество жидкости и опять долил бак водой. В результате количество сиропа в баке уменьшилось в $\frac{25}{3}$ раза. Определить сколько литров жидкости вылил студент первый раз, если объем бака 1000 литров.

Решение.

1) Пусть содержание сиропа в исходном растворе p % и пусть x литров раствора было вылито в первый раз.
2) Тогда после отлития жидкости осталось $(1000 - x)$ литров раствора, а в нем $(1000 - x)\cdot\frac{p}{100}$ литров сиропа и $(1000 - x)\cdot\frac{100 - p}{100}$ воды.
3) После того как долили x литров воды в баке стало: 1000 литров раствора, а в нем $(1000 - x)\cdot\frac{p}{100}$ литров сиропа и $(1000 - x)\cdot\frac{100 - p}{100} + x$ литров воды.

4) В конце всех переливаний в баке стало: 1000 литров раствора с содержанием сиропа $\frac{3p}{25}$%, то есть $1000\cdot\frac{\frac{3p}{25}}{100}=\frac{30p}{25}$ литров сиропа и $1000-\frac{30p}{25}$ литров воды.

5) Тогда до последнего долития $2x$ литров воды в баке было $(1000-2x)$ литров раствора, а в нем $\frac{30p}{25}$ литров сиропа и $1000-\frac{30p}{25}-2x$ воды. Это та же жидкость, что и в пункте 3) решения, соответственно соотношения сиропа и жидкости в ней одинаково.

Составим уравнение:

$$\frac{(1000-x)\cdot\frac{p}{100}}{1000}=\frac{\frac{30p}{25}}{1000-2x}\Leftrightarrow 2x^2-3000x+\frac{22}{25}\cdot 1000^2=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ x\in\{1100;400\}$, 1100 литров не удовлетворяет условию задачи.

Ответ:400.