Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2019 г.

8 класс

Вариант № 2

1. *(9 баллов)* Часы показывают 00:00, при этом часовая и минутная стрелки часов совпадают. Считая это совпадение под номером 0, определите, через какой промежуток времени (в минутах) они совпадут в 19-й раз. При необходимости ответ округлите до сотых по правилам округления.

2. *(9 баллов)* Маше, Даше и Саше поручено собрать урожай смородины со всех кустов на дачном участке. Маша и Даша вдвоём могут собрать все ягоды за 7 часов 30 минут, Маша и Саша – за 6 часов, а Даша и Саша – за 5 часов. За сколько часов дети соберут все ягоды, работая втроём?

3. *(9 баллов)* На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно так, что $\angle CMA = \angle ANC$. Отрезки MC и AN пересекаются в точке O, причем $ON = OM$. Найдите BC, если AM = 5*см*, BM = 3 *см*.

4. *(9 баллов)* Если двузначное число уменьшить на 36, то получится двузначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. В ответе укажите среднее арифметическое получившегося числового ряда.

5. *(12 баллов)* На учебных стрельбах каждый из солдат стрелял по 10 раз. Один из них выполнил задание удачно и выбил 90 очков. Сколько раз он выбил 7 очков, если десяток было 4, а результатами остальных попаданий были семёрки, восьмёрки и девятки. При этом промахов не было ни одного.

6. *(12 баллов)* Мальчики делят улов. Первый взял r рыб и седьмую часть остатка; второй - $2r$ рыб и седьмую часть нового остатка; третий – $3r$ рыб и седьмую часть нового остатка и т.д. Получилось, что таким способом все пойманные рыбы были разделены поровну. Сколько было мальчиков?

7. *(12 баллов)* В прямоугольнике $ABCD$ точка E расположена на диагонали AC так, что $BC = EC$, точка M - на стороне BC так, что $EM = MC$. Найдите длину отрезка MC, если $BM = 5$, $AE = 2$.

8. *(14 баллов)* Дан треугольник ABC. $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$. Прямые O_1O_2, O_2O_3, O_1O_3 - биссектрисы внешних углов треугольника ABC, как показано на рисунке. Точка О - центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найти угол между прямыми O_1O_2 *и* OO_3.

9. *(14 баллов)* При каких значениях параметра ***a*** уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение, если $f(x) = \left|\frac{2x^3 - x^2 - 18x + 9}{(1{,}5x+1)^2 - (0{,}5x-2)^2}\right|$, $p(x) = |-2x + 2| + a$. Если значений параметра больше одного, то в ответе укажите их сумму.

Решение варианта № 2

1. Часы показывают 00:00, при этом часовая и минутная стрелки часов совпадают. Считая это совпадение под номером 0, определите, через какой промежуток времени (в минутах) они совпадут в 19-й раз. При необходимости ответ округлите до сотых по правилам округления.

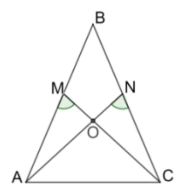
Решение:
Минутная стрелка проходит за час 1 круг, а часовая 1/12 круга, значит скорость их сближения 11/12 круга в час, одно сближение занимает 1/(11/12)=12/11 часа или 720/11 минут. 19 сближений это 19*720/11=13680/11 минут.
Ответ:1243,64.

2. Маше, Даше и Саше поручено собрать урожай смородины со всех кустов на дачном участке. Маша и Даша вдвоём могут собрать все ягоды за 7 часов 30 минут, Маша и Саша – за 6 часов, а Даша и Саша – за 5 часов. За сколько часов дети соберут все ягоды, работая втроём?

Решение: Обозначим всю работу за 1. Пусть x (частей всей работы в час) – производительность труда Маши, y–Даши и z–Саши. Так как при совместной работе производительности труда складываются, составим систему уравнений по условию задачи: $\begin{cases}(x+y)\cdot 7,5=1\\(x+z)\cdot 6=1\\(y+z)\cdot 5=1\end{cases}$; $\begin{cases}(x+y)=\dfrac{2}{15}\\(x+z)=\dfrac{1}{6}\\(y+z)=\dfrac{1}{5}\end{cases}$.

Складывая все уравнения системы, получим: $2(x+y+z)=\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{15}{30}=\dfrac{1}{2}$; $x+y+z=\dfrac{1}{4}$.
Таким образом, втроём дети соберут всю смородину за 4 часа.
Ответ: 4.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно так, что $\angle CMA=\angle ANC$. Отрезки MC и AN пересекаются в точке O, причем $ON=OM$. Найдите BC, если AM = 5*см*, BM = 3 *см*.
Решение:



Треугольники AMO и CNO равны ($\angle AMO=\angle CNO$, ON=OM, $\angle MOA=\angle NOC$,как вертикальные). Из равенства треугольников следует, что AM = NC, $\angle MAO=\angle NCO$ и OA = OC. Получаем, что треугольник AOC равнобедренный, а, значит, углы CAO и ACO равны. Откуда треугольник ABC равнобедренный и AB = BC = 8 *см*.

Ответ: 8 см.

4. Если двузначное число уменьшить на 36, то получится двузначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. В ответе укажите среднее арифметическое получившегося числового ряда.

Решение.
$\overline{xy} = 10x + y$ - исходное двузначное число, тогда $\overline{yx} = 10y + x$ - число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Получим уравнение $10x + y = 10y + x + 36$

Из уравнения видно, что двузначное число больше 36. Начнем исследование с числа десятков, равному 4.

x	*уравнение*	*y*	*число*
4	$40 + y = 10y + 4 + 36$	$y = 0$	40 не подходит по условию
5	$50 + y = 10y + 5 + 36$	$y = 1$	51
6	$60 + y = 10y + 6 + 36$	$y = 2$	62
7	$70 + y = 10y + 7 + 36$	$y = 3$	73
8	$80 + y = 10y + 8 + 36$	$y = 4$	84
9	$90 + y = 10y + 9 + 36$	$y = 5$	95

Это могут быть числа 51,62,73, 84, 95. Среднее арифметическое равно 73.
Ответ: 73.

5. На учебных стрельбах каждый из солдат стрелял по 10 раз. Один из них выполнил задание удачно и выбил 90 очков. Сколько раз он выбил 7 очков, если десяток было 4, а результатами остальных попаданий были семёрки, восьмёрки и девятки. При этом промахов не было ни одного.

Решение:
Так как солдат выбил 90 очков и 40 из них набрал за 4 раза, то за оставшиеся 6 выстрелов он набрал 50 очков. Поскольку солдат попадал только в семерку, восьмерку и девятку, то пусть за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмёрку и девятку) он набрал 24 очка. Тогда за оставшиеся три выстрела он набрал 26 очков, что возможно только при единственной комбинации чисел 7, 8, 9: 8+9+9=26. Таким образом, в семёрку стрелок попал один раз.
Ответ: 1.

6. Мальчики делят улов. Первый взял r рыб и седьмую часть остатка; второй - $2r$ рыб и седьмую часть нового остатка; третий – $3r$ рыб и седьмую часть нового остатка и т.д. Получилось, что таким способом все пойманные рыбы были разделены поровну. Сколько было мальчиков?

Решение:
Пусть x-количество мальчиков; y- количество полученных каждым рыб. Тогда последний мальчик взял xr рыб (остатка быть не могло, иначе не было бы деления поровну), тогда $y=xr$. Предпоследний

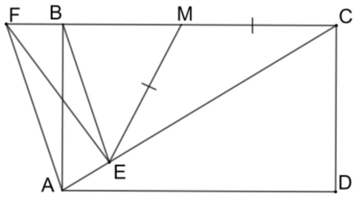
мальчик взял $(x-1)r+\frac{xr}{6}=y; т.к. xr - это \frac{6}{7}$ от предпоследнего остатка, значит, последний остаток $\frac{7}{6}xr$, а его седьмая часть $\frac{xr}{6}$.

Тогда $(x-1)r+\frac{xr}{6}=xr; 6r=xr; x=6.$

Ответ: 6.

7. В прямоугольнике *ABCD* точка *E* расположена на диагонали *AC* так, что *BC* = *EC*, точка *M* - на стороне *BC* так, что *EM* = *MC*. Найдите длину отрезка *MC*, если *BM* = 5, *AE* = 2.

Решение:

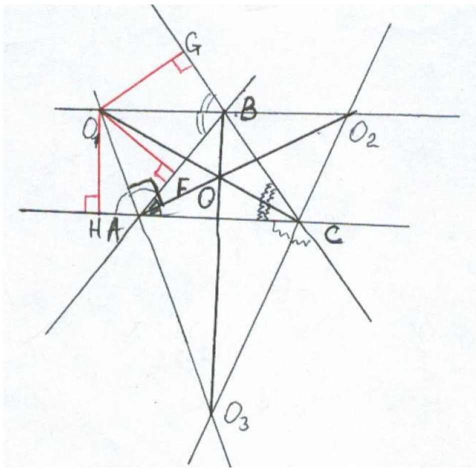


Проведем *AF* параллельно *BE* (точка *F* принадлежит прямой *BC*), тогда $\angle CBE = \angle CFA$, $\angle CEB = \angle CAF$. Учитывая, что *BC* = *CE* получаем, что треугольник *FCA* равнобедренный, следовательно *FC* = *AC* и *FB* = *AE*. Треугольники *FBA* и *AEF* равны, так как *FB* = *AE*, $\angle AFB = \angle FAE$, *AF*- общая. Получаем, что $\angle FBA = \angle AEF = 90^o$, откуда $\angle FEC = 90^o$. Треугольник *FCE* прямоугольный и *MC* = *ME*, а значит FM = MC и $FM = FB + BM = AE + BM = MC = 7$.

Ответ: 7.

8. Дан треугольник *ABC*. $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$. Прямые O_1O_2, O_2O_3, O_1O_3 - биссектрисы внешних углов треугольника *ABC*, как показано на рисунке. Точка O - центр вписанной в треугольник *ABC* окружности. Найти угол между прямыми O_1O_2 и OO_3.

Решение:



Докажем, что биссектрисы двух внешних углов и одного внутреннего пересекаются в одной точке. Пусть O_1G, O_1H, O_1F – перпендикуляры на *BC, AC* и *AB* соответственно. Тогда треугольники AHO_1 и BFO_1, BFO_1 и BGO_1 прямоугольные и равны по гипотенузе и острому углу. Из равенства треугольников следует, что $HO_1=GO_1$. Значит, O_1 равноудалена от сторон угла C, то есть CO_1 – биссектриса угла C. Аналогично доказывается, что AO_2 и BO_3 биссектрисы углов A и B. Точка *O* -

точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Угол O_1AO_2 прямой, так как образован биссектрисами смежных углов. Аналогично прямыми являются углы O_1BO_3 и O_1CO_2, а, следовательно, O - точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$. Значит, O_3O перпендикулярна O_1O_2.

Ответ: 90⁰.

9. При каких значениях параметра ***a*** уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение, если $f(x) = \left|\frac{2x^3-x^2-18x+9}{(1{,}5x+1)^2-(0{,}5x-2)^2}\right|$, *p(x)* $=|-2x+2|+a$. Если значений параметра больше одного, то в ответе укажите их сумму.

Решение.

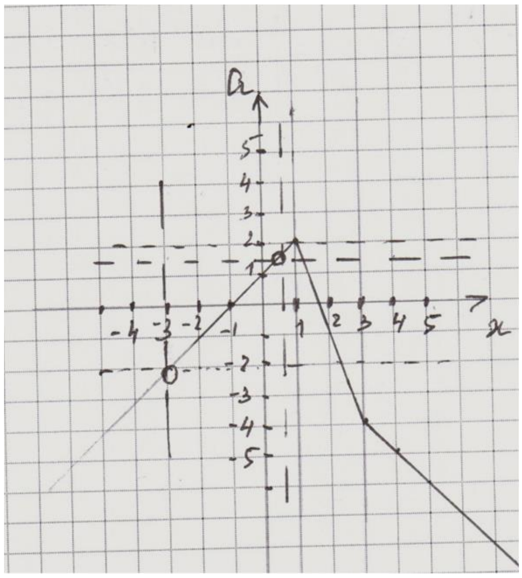
Упростим $f(x) = \left|\frac{2x^3-x^2-18x+9}{(1{,}5x+1)^2-(0{,}5x-2)^2}\right|$, получим $f(x) = |x-3|$, где $x \neq 0{,}5$, $x \neq -3$.

Решим уравнение $|x-3| = |-2x+2| + a$, где $x \neq 0{,}5$, $x \neq -3$ графически в системе *xOa*.

1) $\begin{cases} x < 1 \\ -x+3 = -2x+2+a \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1 \\ a = x+1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1 \leq x < 3 \\ -x+3 = 2x-2+a \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \leq x < 3 \\ a = -3x+5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \geq 3 \\ x-3 = 2x-2+a \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 3 \\ a = -x-1 \end{cases}$



Уравнение имеет одно решение при *a* = -2, *a* =2, *a* =1,5.
Сумма равна 1,5

Ответ: 1,5.