

Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету  
«Математика», осень 2019 г.

8 класс

Вариант № 1

1. (9 баллов) Светлана берёт тройку чисел и преобразует её по правилу: на каждом шаге каждое число заменяется на сумму двух остальных. Чему равна разность между самым большим и самым маленьким числами в тройке на 1580-ом шаге применения этого правила, если изначальная тройка чисел была  $\{80; 71; 20\}$ ? Если вопрос задачи допускает несколько вариантов ответа, то укажите их все в виде множества.
2. (9 баллов) Два шарика, размерами которых можно пренебречь в данной задаче, движутся по окружности. При движении в одном направлении они встречаются каждые 20 секунд, а при движении в противоположных направлениях – каждые 4 секунды. Известно, что при движении по окружности навстречу друг другу расстояние между сближающимися шариками уменьшается на 75 см каждые 3 секунды (пока они не встретятся). Найдите скорость более медленного шарика (в см/сек).
3. (9 баллов) В треугольнике  $ABC$  сторона  $BC$  равна 19 см. Перпендикуляр  $DF$ , проведенный к стороне  $AB$  через ее середину – точку  $D$ , пересекает сторону  $BC$  в точке  $F$ . Найдите периметр треугольника  $AFC$ , если сторона  $AC$  равна 10 см.
4. (9 баллов) Саша купил в магазине карандаши по 13 рублей за штуку и ручки по 20 рублей за каждую, всего он заплатил 350 рублей. Сколько всего штук карандашей и ручек приобрёл Саша?
5. (12 баллов) Мальчик написал на листе бумаги первые двадцать натуральных чисел. Ему не понравилось, как написано одно из них, и он зачеркнул это число. Оказалось, что среди 19 оставшихся есть число, равное среднему арифметическому этих 19 чисел. Какое число он зачеркнул? Если задача имеет не единственное решение, то выпишите в ответ сумму этих чисел.
6. (12 баллов) Семья пчеловодов привезла на ярмарку емкости с медом объемом 13, 15, 16, 17, 19, 21 литров. В августе были проданы три емкости целиком, в сентябре еще две, причем получилось, что в августе меда продали вдвое больше, чем в сентябре. Определите, какие емкости освободились в августе. В ответе укажите наибольший из объемов.
7. (12 баллов) В прямоугольнике  $ABCD$  точка  $E$  является серединой стороны  $CD$ . На стороне  $BC$  взяли точку  $F$  так, что угол  $AEF$  прямой. Найдите длину отрезка  $FC$ , если  $AF=7$ ,  $BF=4$ .
8. (14 баллов) В треугольнике  $ABC$  с  $\angle B = 120^\circ$  проведены биссектрисы  $AA_1, BB_1, CC_1$ .  
Найти  $\angle C_1B_1A_1$ .
9. (14 баллов) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $|f(x) - 4| = p(x)$ , если  $f(x) = \left| \frac{x^2+3x}{x+3} - \frac{x^2-4x+4}{2-x} \right|$ ,  $p(x) = a$  имеет три решения. Если значений параметра больше одного, то в ответе укажите их произведение.

## Решение варианта № 1

1. Светлана берёт тройку чисел и преобразует её по правилу: на каждом шаге каждое число заменяется на сумму двух остальных. Чему равна разность между самым большим и самым маленьким числами в тройке на 1580-ом шаге применения этого правила, если изначальная тройка чисел была  $\{80; 71; 20\}$ ? Если вопрос задачи допускает несколько вариантов ответа, то укажите их все в виде множества.

**Решение:**

Обозначим 3 числа, как  $\{x; x+a; x+b\}$ , где  $0 < a < b$ . Тогда разность между самым большим и самым маленьким числом на любом шаге, начиная с нулевого шага, будет инвариантом, то есть неизменной и равняться  $b$ .  $b = 80 - 20 = 60$ .

**Ответ:** 60.

2. Два шарика, размерами которых можно пренебречь в данной задаче, движутся по окружности. При движении в одном направлении они встречаются каждые 20 секунд, а при движении в противоположных направлениях – каждые 4 секунды. Известно, что при движении по окружности навстречу друг другу расстояние между сближающимися шариками уменьшается на 75 см каждые 3 секунды (пока они не встретятся). Найдите скорость более медленного шарика (в см/сек).

**Решение:**

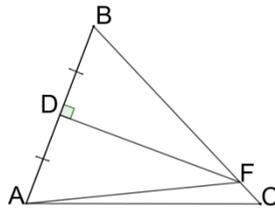
Обозначим скорость более быстрого шарика  $v$ , а более медленного  $u$ . При движении в одну сторону более быстрый шарик догоняет более медленный тогда, когда разница пройденных ими расстояний становится равной длине круга. По условию задачи составим систему двух линейных уравнений.

$$\begin{cases} (u + v) \cdot 4 = (v - u) \cdot 20 \\ (u + v) \cdot 3 = 75 \end{cases} \quad . \text{ Откуда } u = \frac{2}{3}v, v = 15 \text{ см} / \text{с}; u = 10 \text{ см} / \text{с}.$$

**Ответ:** 10.

3. В треугольнике  $ABC$  сторона  $BC$  равна 19 см. Перпендикуляр  $DF$ , проведенный к стороне  $AB$  через ее середину – точку  $D$ , пересекает сторону  $BC$  в точке  $F$ . Найдите периметр треугольника  $AFC$ , если сторона  $AC$  равна 10 см.

**Решение:**



Треугольник  $ABF$  ( $BF = AF$ ) равнобедренный, так как  $DF \perp AB$ ,  $D$  – середина  $AB$ .  $P_{AFC} = AF + FC + AC = BF + FC + AC = BC + AC = 29$  см.

**Ответ:** 29 см.

4. Саша купил в магазине карандаши по 13 рублей за штуку и ручки по 20 рублей за каждую, всего он заплатил 350 рублей. Сколько всего штук карандашей и ручек приобрёл Саша?

**Решение.**

Пусть  $x$  – количество карандашей,  $y$  – количество ручек. Получим уравнение  $13x + 20y = 355$

$$13(x+y) + 7y = 355, \text{ обозначим } x+y=t \quad (1)$$

$$13t + 7y = 355$$

$$7(t+y) + 6t = 355, \text{ обозначим } t+y=k \quad (2)$$

$$7k + 6t = 355$$

$$6(k+t) + k = 355, \text{ обозначим } k+t=n \quad (3)$$

$$6n + k = 355$$

$$k = 355 - 6n. \text{ Подставим в (3), } t = 7n - 355$$

$$\text{Подставим в (2), } y = 710 - 13n$$

Подставим в (1),  $x = 20n - 1065$ . Так как  $x > 0, y > 0$ , то  $n = 54$ . Тогда соответственно  $x = 8, y = 15$ .

8 карандашей и 15 ручек, всего 23 штуки.

**Ответ:** 23.

5. Мальчик написал на листе бумаги первые двадцать натуральных чисел. Ему не понравилось, как написано одно из них, и он зачеркнул это число. Оказалось, что среди 19 оставшихся есть число, равное среднему арифметическому этих 19 чисел. Какое число он зачеркнул? Если задача имеет не единственное решение, то выпишите в ответ сумму этих чисел.

**Решение:**

Сумма чисел на листе, первоначально равная  $1+2+3+\dots+20=210$  и уменьшившаяся на зачеркнутое число, заключена в пределах от  $210-20=190$  до  $210-1=209$ . Она, кроме того, кратна 19, поскольку в 19 раз больше одного из слагаемых. А так, как из чисел 190, 191, 192, ..., 209 только числа 190 и 209 кратны 19, то стёрли либо число  $20=210-190$ , либо  $1=210-209$ . В обоих случаях среднее арифметическое чисел, оставшихся на листе, не совпадает со стёртым числом.

**Ответ:** 21.

6. Семья пчеловодов привезла на ярмарку емкости с медом объемом 13, 15, 16, 17, 19, 21 литров. В августе были проданы три емкости целиком, в сентябре еще две, причем получилось, что в августе меда продали вдвое больше, чем в сентябре. Определите, какие емкости освободились в августе. В ответе укажите наибольший из объемов.

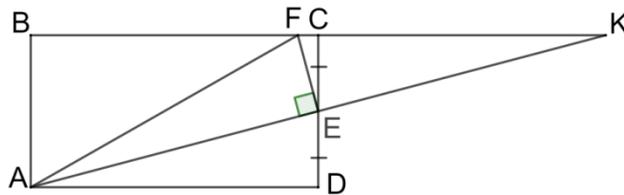
**Решение:**

Всего было привезено меда  $13+15+16+17+19+21=101$  л. Количество проданного меда делится на три. Значит, непроданная ёмкость имеет объём, дающий при делении на 3 остаток 2 (как и 101), т.е. 17 л. Продали  $101-17=84$  л, причем в сентябре треть от 84 л – 28 л. Это только набор 13 и 15 л. В августе проданы были емкости 16, 19, 21 л. Наибольший из них 21 л.

**Ответ:** 21.

7. В прямоугольнике  $ABCD$  точка  $E$  является серединой стороны  $CD$ . На стороне  $BC$  взяли точку  $F$  так, что угол  $AEF$  прямой. Найдите длину отрезка  $FC$ , если  $AF=7, BF=4$ .

**Решение:**



Пусть прямые  $AE$  и  $BC$  пересекаются в точке  $K$ , тогда треугольники  $AED$  и  $KCE$  равны ( $\angle AED = \angle CED$  как вертикальные,  $CE = ED$ ,  $\angle ADE = \angle KCE = 90^\circ$ ), следовательно,  $CK = AD$ ,  $AE = EK$ . Треугольник  $AFK$  равнобедренный ( $FE \perp AK$ ,  $E$  середина  $AK$ ), а значит  $AF = FK = 7$ . Так как  $AD = CK$  и  $AD = BC$ , получаем  $BK = BF + FK = 2(BF + FC)$ .  $FC = 5,5 - 4 = 1,5$  см.

**Ответ:** 1,5 см.

8. В треугольнике  $ABC$  с  $\angle B = 120^\circ$  проведены биссектрисы  $AA_1, BB_1, CC_1$ . Найти  $\angle C_1B_1A_1$ .

**Решение:**

Продолжим сторону  $AB$  за точку  $B$ , тогда  $BC$  биссектриса угла  $\angle B_1BK$ , а, значит, точка  $A_1$  равноудалена от сторон  $B_1B$  и  $BK$ .

Учитывая, что точка  $A_1$  лежит на биссектрисе  $\angle BAC$ , а, значит, равноудалена от его сторон.

Получаем, что  $A_1$  равноудалена от сторон  $B_1B$  и  $B_1C$ , а, значит, лежит на биссектрисе  $\angle BB_1C$ .

Аналогично доказываем, что  $B_1C_1$  биссектриса  $\angle AB_1B$ .

Следовательно  $\angle C_1B_1A_1 = 90^\circ$ , как угол между биссектрисами смежных углов.

**Ответ:**  $\angle C_1B_1A_1 = 90^\circ$ .

9. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $|f(x) - 4| = p(x)$ , если  $f(x) = \left| \frac{x^2+3x}{x+3} - \frac{x^2-4x+4}{2-x} \right|$ ,  $p(x) = a$  имеет три решения. Если значений параметра больше одного, то в ответе укажите их произведение.

**Решение:**

Упростим  $f(x) = \left| \frac{x^2+3x}{x+3} - \frac{x^2-4x+4}{2-x} \right|$ , получим  $f(x) = |2x - 2|$ , где  $x \neq -3, x \neq 2$ .

Решим уравнение  $||2x - 2| - 4| = a$ , где  $x \neq -3, x \neq 2$  графически в системе  $xOa$ .

Уравнение имеет три решения при  $a = 2$ .

Произведение равно 2.

**Ответ:** 2.

