

**Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», осень 2019 г.
11 класс**

Вариант № 2

1. Группу школьников, направлявшихся в школьный лагерь, планировалось рассадить по автобусам так, чтобы в каждом автобусе было одинаковое количество пассажиров. Сначала в каждый автобус сажали по 22 человека, однако, оказалось, что при этом не удалось посадить трех школьников. Когда же один автобус уехал пустым, то в оставшиеся автобусы все школьники сели поровну. Сколько школьников было в группе, если известно, что для перевозки школьников было выделено не более 18 автобусов, и в каждый автобус помещается не более 36 человек.

Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

2. Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющих уравнению

$x^2 - xy - 6y^2 - 11 = 0$. Для каждой найденной пары (x, y) вычислите произведение xy . В ответ запишите сумму этих произведений. (5 баллов)

3. Пусть $g(x) = \frac{2}{x^2 - 8x + 17}$. Найдите все возможные значения параметра a , при которых

неравенство $a^2 + 6a + \frac{727}{145} \leq g(g^4(x)) \leq 10a^2 + 29a + 2$ выполняется при всех действительных x . В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим возможными значениями параметра a . (6 баллов)

4. Сколькими способами можно начертить линию $x \sin \sqrt{16 - x^2 - y^2} = 0$ без отрывов и повторов, т.е. не отрывая карандаша и не проводя более одного раза по одной и той же линии? (12 баллов)

5. Для скольких двузначных натуральных чисел n верны ровно два из этих трех утверждений: (А) n нечетно; (Б) n не делится на 3; (В) n делится на 5? (12 баллов)

6. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB , если его стороны OA и OB лежат на графике функции $y = 2|x| - x + 1$, а прямая AB проходит через точку $M(0; 2)$? (16 баллов)

7. В треугольнике ABC угол A равен 45° , угол B равен 60° , биссектрисы AE и CF пересекаются в точке O , причем $OE = \sqrt{3}/3$. Найдите площадь треугольника AEF . Результат округлите до десятых (все промежуточные вычисления проводить точно). (16 баллов)

8. Найдите все целые значение параметра a , при которых система имеет хотя бы одно решение $\begin{cases} y - 2 = x(x + 2), \\ x^2 + a^2 + 2x = y(2a - y). \end{cases}$ В ответе укажите сумму найденных значений параметра a . (16 баллов)

9. Основанием пирамиды $TABCD$ является равнобедренная трапеция $ABCD$, длина большего основания AD которой равна $12\sqrt{3}$. Отношение площадей частей трапеции $ABCD$, на которые ее делит средняя линия, равно $5 : 7$. Все боковые грани пирамиды $TABCD$ наклонены к плоскости основания под углом 30° . Найдите объем пирамиды $SAKND$, где точки K и N – середины ребер TB и TC соответственно, точка S принадлежит ребру TD , причем $TS : SD = 1 : 2$. (20 баллов)

Решение варианта № 2

1. Группу школьников, направлявшихся в школьный лагерь, планировалось рассадить по автобусам так, чтобы в каждом автобусе было одинаковое количество пассажиров. Сначала в каждый автобус сажали по 22 человека, однако, оказалось, что при этом не удалось посадить трех школьников. Когда же один автобус уехал пустым, то в оставшиеся автобусы все школьники сели поровну. Сколько школьников было в группе, если известно, что для перевозки школьников было выделено не более 18 автобусов, и в каждый автобус помещается не более 36 человек. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

Решение. Пусть n – количество автобусов, m – количество школьников в каждом автобусе, S – общее число школьников.

Имеем $S = 22n + 3$, $S = (n-1)m$, $n \leq 10$, $m \leq 36$, $22n + 3 = (n-1)m$, $n = 1 + \frac{25}{m-22}$.
Учитывая ограничения на n и m , получаем единственно возможный случай:
 $m = 27$, $n = 6$, $S = 135$.

Ответ: 135.

2. Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющих уравнению $x^2 - xy - 6y^2 - 11 = 0$. Для каждой найденной пары (x, y) вычислите произведение $xу$. В ответ запишите сумму этих произведений. (5 баллов)

Решение. $x^2 - xy - 6y^2 - 11 = 0$, $(x-3y)(x+2y) = 11$. Поскольку x и y целые, то имеем четыре случая:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} x-3y=11, \\ x+2y=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2, \\ x=5; \end{cases} & 2) \begin{cases} x-3y=-11, \\ x+2y=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2, \\ x=-5; \end{cases} \\
 3) \begin{cases} x-3y=1, \\ x+2y=11, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2, \\ x=7; \end{cases} & 4) \begin{cases} x-3y=-1, \\ x+2y=-11, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2, \\ x=-7. \end{cases}
 \end{array}$$

Ответ: 8.

3. Пусть $g(x) = \frac{2}{x^2 - 8x + 17}$. Найдите все возможные значения параметра a , при которых

неравенство $a^2 + 6a + \frac{727}{145} \leq g(g^4(x)) \leq 10a^2 + 29a + 2$ выполняется при всех действительных x . В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим возможными значениями параметра a . (6 баллов)

Решение. Функция $g(x) = \frac{2}{x^2 - 8x + 17} = \frac{2}{(x-4)^2 + 1}$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0; 2]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x = 4$, $g_{\max} = g(4) = 2$, на промежутке $(-\infty; 4)$ функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(4; +\infty)$ – убывает. Функция $g^4(x)$ принимает все значения из промежутка $(0; 16]$, поскольку

$t = g(x) \in (0; 2]$, а функция t^4 возрастает в этом промежутке. Для нахождения множества значений функции $f(x) = g(g^4(x))$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $(0; 16]$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[g(16); g(4)] = [2/145; 2]$.

Неравенство $a^2 + 6a + \frac{727}{145} \leq g(g^4(x)) \leq 10a^2 + 29a + 2$ выполняется при всех действительных x , если $(a+1)(a+5) \leq 0$, $0 \leq a(10a+29)$, $a \in [-5; -2,9]$.

Ответ: 2,1.

4. Сколькими способами можно начертить линию $x \sin \sqrt{16 - x^2 - y^2} = 0$ без отрывов и повторов, т.е. не отрывая карандаша и не проводя более одного раза по одной и той же линии? (12 баллов)

Решение. Поскольку $\pi^2 < 16 < (2\pi)^2$, данная линия состоит из 2 окружностей радиусами 4 и $\sqrt{16 - \pi^2}$ и вертикального отрезка.



Эта линия уникальна, т.к. имеет лишь 2 нечетные точки $A(0;4)$ и $B(0;-4)$. Начать вычерчивать линию надо в одной из этих точек, закончить – в другой (2 варианта). Далее, 3! способами можно выбрать, в каком порядке пройти левую дугу, правую дугу и диаметр. При прохождении диаметра так же 3! способами выбираем, в какой последовательности проходить дуги и диаметр внутренней окружности. В итоге число способов $2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$.

Ответ: 72.

5. Для скольких двузначных натуральных чисел n верны ровно два из этих трех утверждений: (А) n нечетно; (Б) n не делится на 3; (В) n делится на 5? (12 баллов)

Решение. Можно рассмотреть первые 30 двузначных чисел (от 10 до 39), а потом результат умножить на 3, т.к. остатки при делении на 2, на 3 и на 5 не меняются при сдвиге на 30 или 60. Возможны три взаимоисключающих случая.

- 1) Выполнены (А) и (Б) и не выполнено (В). Из (А) и (Б) следует, что n делится на 6 с остатком 1 или 5, при этом n не должно делиться на 5. Таких чисел восемь: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.
- 2) Выполнено (А), не выполнено (Б) и выполнено (В). Тогда n делится на 6 с остатком 3, при этом n делится на 5. Такое число одно: 15.
- 3) Не выполнено (А), выполнены (Б) и (В). Тогда n делится на 6 с остатком 2 или 4, при этом n делится на 5. Таких чисел два: 10 и 20.

Итого: $3 \cdot (8+1+2) = 33$ числа.

Ответ: 33.

6. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB , если его стороны OA и OB лежат на графике функции $y = 2|x| - x + 1$, а прямая AB проходит через точку $M(0; 2)$? (16 баллов)

Решение.

$$S_{AOB} = S_{AOM} + S_{BOM}, \quad A(a; a+1), B(b; -3b+1),$$

$$S_{AOM} = \frac{1}{2} OM \cdot a, \quad S_{BOM} = \frac{1}{2} OM \cdot (-b), \quad OM = 1,$$

$$S_{AOB} = \frac{a-b}{2}.$$

Прямая AB проходит через точку M , ее уравнение $y = kx + 2$. Выразим переменные a и b через параметр k , подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой AB

$$a = ka + 1, \quad a = \frac{1}{1-k}, \quad -3b = kb + 1, \quad b = -\frac{1}{k+3}.$$

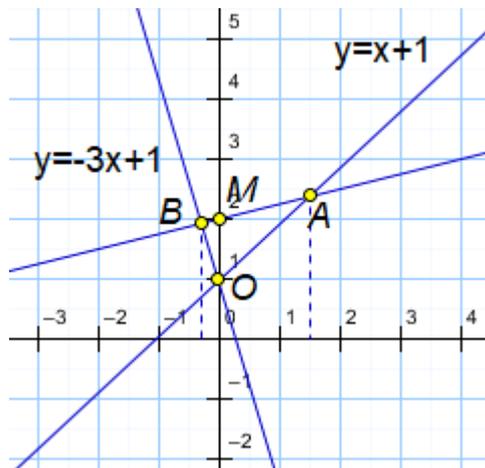
Выразим площадь треугольника

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-k} + \frac{1}{k+3} \right) = \frac{2}{3-2k-k^2} = \frac{2}{4-(k+1)^2}.$$

Поскольку $4 - (k+1)^2 \leq 4$, то

$$S_{AOB} = \frac{2}{4-(k+1)^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Наименьшее значение $\min S_{AOB} = \frac{1}{2}$ при $k = -1$.



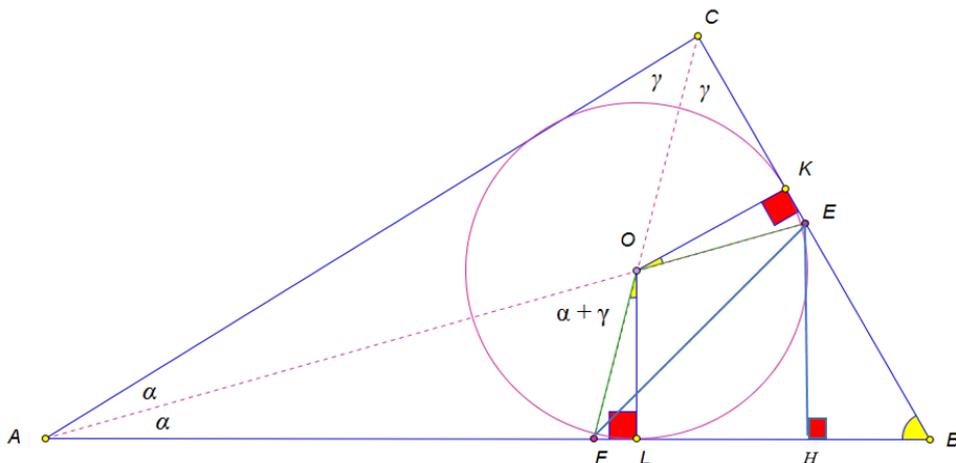
Ответ: 0,5.

7. В треугольнике ABC угол A равен 45° , угол B равен 60° , биссектрисы AE и CF пересекаются в точке O , причем $OE = \sqrt{3}/3$. Найдите площадь треугольника AEF . Результат округлите до десятых (все промежуточные вычисления проводить точно). (16 баллов)

Решение.

1. Обозначив $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 2\gamma$, вычислим величину углов $\angle AOF = \angle COE$. Эти углы являются внешними для треугольника AOC . И значит, $\angle AOF = \angle COE = \alpha + \gamma = 60^\circ$.

2. Из точки O опустим высоты OL и OK на основания AB и BC , соответственно. При этом $OL = OK$ (радиус вписанной окружности). Имеем $\angle KOL = 120^\circ$, $\angle FOE = 120^\circ$.



Отсюда следует, что $\angle FOL = \angle KOE$, треугольники FOL и KOE равны, и $OE = OF$.

3. Треугольник OEF равнобедренный, угол $\angle FEO = 30^\circ$, $FE = 1$.

4. По теореме синусов для треугольника AEF имеем
$$\frac{EF}{\sin 45^\circ/2} = \frac{AF}{\sin 30^\circ},$$

$$AF = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

5. Пусть EH – высота треугольника AEF. Находим $\angle BFE = 30^\circ + 45^\circ/2$,

$$\begin{aligned} EH &= FE \sin(30^\circ + 45^\circ/2) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ/2 + \cos 30^\circ \sin 45^\circ/2 = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{2 - \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$6. S_{AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot EH = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{4} \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \right) = \frac{1}{8} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \approx 0,5.$$

Ответ: 0,5.

8. Найдите все целые значения параметра a , при которых система имеет хотя бы одно решение

$$\begin{cases} y - 2 = x(x + 2), \\ x^2 + a^2 + 2x = y(2a - y). \end{cases}$$

В ответе укажите сумму найденных значений параметра a .

(16 баллов)

Решение. Преобразуем систему

$$\begin{cases} y - 1 = (x + 1)^2, \\ (x + 1)^2 + (y - a)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 1 = (x + 1)^2, \\ y - 2 + (y - a)^2 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы

$$y^2 - y(2a - 1) + a^2 - 2 = 0, \quad D = (2a - 1)^2 - 4(a^2 - 2) = 9 - 4a$$

Решение существует при $a \leq 9/4$, $y = \frac{2a - 1 \pm \sqrt{9 - 4a}}{2}$, причем $y \geq 1$.

Для существования решения должны выполняться условия

$$\begin{cases} D = 9 - 4a \geq 0 \\ \begin{cases} f(1) = a^2 - 2a > 0 \\ \frac{2a - 1}{2} > 1 \\ f(1) = a^2 - 2a \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq 9/4 \\ \begin{cases} a(a - 2) > 0 \\ 2a - 1 > 2 \\ a(a - 2) \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow a \in [0, 9/4].$$

Суммируя целые значения параметра, получим $0 + 1 + 2 = 3$.

Ответ: 3.

9. Основанием пирамиды $TABCD$ является равнобедренная трапеция $ABCD$, длина большего основания AD которой равна $12\sqrt{3}$. Отношение площадей частей трапеции $ABCD$, на которые ее делит средняя линия, равно $5 : 7$. Все боковые грани пирамиды $TABCD$ наклонены к плоскости основания под углом 30° . Найдите объем пирамиды $SAKND$, где точки K и N – середины ребер TB и TC соответственно, точка S принадлежит ребру TD , причем $TS : SD = 1 : 2$. (16 баллов)

Решение.

Пусть TO – высота пирамиды. Поскольку все боковые грани наклонены к основанию под одним и тем же углом, то O – центр окружности, вписанной в основание. Пусть MP – средняя линия трапеции,

$$AD = a = 12\sqrt{3}, BC = b.$$

По условию имеем

$$S_{MBCP} = 5x, S_{AMPD} = 7x, \quad \frac{5}{7} = \frac{b + (a+b)/2}{a + (a+b)/2} = \frac{3b + 12\sqrt{3}}{b + 36\sqrt{3}}, \quad b = 6\sqrt{3}.$$

Поскольку в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, то

$$AB + CD = a + b, \quad AB = CD = 19\sqrt{3}.$$

Вычислим высоту трапеции

$$h = \sqrt{AB^2 - (a-b)^2/4} = 6\sqrt{6}.$$

Через точку O проведем прямую, перпендикулярную основаниям трапеции и пересекающую эти основания в точках Q и R , $OR = h$. Поскольку боковые грани наклонены к плоскости

$$TO = \frac{1}{2}QR \operatorname{tg} 30^\circ = 3\sqrt{2}.$$

основания под углом 30° , то высота пирамиды

Пусть TF – высота пирамиды $TAKND$, TF – перпендикуляр, опущенный из точки T на прямую QL , где L – середина KN . Вычислим объем пирамиды

$$V_{SAKND} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AD + KN}{2} \cdot QS \cdot \frac{2}{3} TF.$$

SAKND: можно вычислить площадь треугольника TQS двумя способами:

$$S_{TQS} = \frac{QR \cdot TO}{4}, S_{TQS} = \frac{QS \cdot TF}{2}, \quad QS \cdot TF = \frac{QR \cdot TO}{2},$$

$$V_{SAKND} = \frac{1}{6} \cdot \frac{AD + KN}{2} \cdot \frac{2}{3} QR \cdot TO.$$

Отсюда получаем $V_{SAKND} = 90$.

Ответ: 90.

