Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2019 г.

11 класс

Вариант № 1

1. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль, и с некоторым опозданием – второй. Когда первый автомобиль проехал половину пути, второй проехал $26\frac{1}{4}$ км, а когда второй проехал половину пути, первый проехал $31\frac{1}{5}$ км. Обогнав первый автомобиль, второй прибыл в пункт B, сразу повернул обратно и, проехав 2 км, встретился с первым автомобилем. Найдите расстояние между пунктами A и B. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

2. Решите уравнение $\sqrt{8x+5}+2\{x\}=2x+2$. Здесь $\{x\}-$ дробная часть числа x, т.е. $\{x\}=x-[x]$. В ответ запишите сумму всех решений. (5 баллов)

3. Найдите наибольшее целое число a, при котором выражение

$$a^2-15a-(\operatorname{tg}x-1)(\operatorname{tg}x+2)(\operatorname{tg}x+5)(\operatorname{tg}x+8)$$

меньше 35 при любом значении $x\in(-\pi/2\,;\,\pi/2)$. (6 баллов)

4. Даны шесть носков, все разной окраски и легко растяжимы. Выворачивать их наизнанку нельзя. Сколькими способами можно надеть по 3 носка на каждую ногу, учитывая какой надевать раньше, какой позже? (12 баллов)

5. Пусть $x,\ y,\ z$ – корни уравнения $t^3-2t^2-9t-1=0$. Найти $\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{x\,y}{z}$. (12 баллов)

6. На плоскости xOy прямые $y=3x-3$ и $x=-1$ пересекаются в точке B, а прямая, проходящая через точку $M(1;2)$, пересекает заданные прямые соответственно в точках A и C. При каком положительном значении абсциссы точки A площадь треугольника ABC будет наименьшей? (12 баллов)

7. В треугольнике ABC со сторонами $AB=4$ и $BC=3$ проведены биссектрисы AE и CF, которые пересекаются в точке O, причем $OE=OF$. Найдите квадрат медианы треугольника ABC, проведенной из вершины B. (16 баллов)

8. Укажите наименьшее целое значение a, при котором существует единственное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{y}{a-\sqrt{x}-1}=4, \\ y=\dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}. \end{cases}$$

(16 баллов)

9. Основанием пирамиды TABCD является равнобедренная трапеция ABCD, средняя линия которой равна $5\sqrt{3}$. Отношение площадей частей трапеции ABCD, на которые ее делит средняя линия, равно $7:13$. Все боковые грани пирамиды TABCD наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем пирамиды TAKND, где точки K и N – середины ребер TB и TC соответственно, AD – большее основание трапеции ABCD. (16 баллов)

Решение варианта № 1

1. Из пункта А в пункт В выехал автомобиль, и с некоторым опозданием – второй. Когда первый автомобиль проехал половину пути, второй проехал $26\frac{1}{4}$ км, а когда второй проехал половину пути, первый проехал $31\frac{1}{5}$ км. Обогнав первый автомобиль, второй прибыл в пункт В, сразу повернул обратно и, проехав 2 км, встретился с первым автомобилем. Найдите расстояние между пунктами А и В. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

Решение. S – расстояние между пунктами А и В.

$$\frac{S-2-S/2}{S+2-26,25}=\frac{S-2-31,2}{S+2-S/2},\quad 5S^2-383S+5394=0,\quad \sqrt{D}=197,\quad S=58.$$

Ответ: 58.

2. Решите уравнение $\sqrt{8x+5}+2\{x\}=2x+2$. Здесь $\{x\}$ – дробная часть числа x, т.е. $\{x\}=x-[x]$. В ответ запишите сумму всех решений. (5 баллов)

Решение. Уравнение равносильно следующему $\sqrt{8x+5}-2[x]-2=0,\quad [x]=n\in\mathbb{N}$, $n\le x<n+1,\ 2n+2=\sqrt{8x+5},$ при $n\ge -1$ имеем $4n^2+8n-1=8x.$ Подставляем в двойное неравенство $8n\le 4n^2+8n-1<8n+8,\quad 1\le 4n^2<9,$ получаем $n=1$ и $n=-1.$ Следовательно, $x=-\frac{5}{8}$ и $x=\frac{11}{8}.$

Ответ: 0,75.

3. Найдите наибольшее целое число a, при котором выражение

$$a^2-15a-(\operatorname{tg}x-1)(\operatorname{tg}x+2)(\operatorname{tg}x+5)(\operatorname{tg}x+8)$$

меньше 35 при любом значении $x\in(-\pi/2\,;\,\pi/2)$. (6 баллов)

Решение. Сделаем замену $t=tgx.$ Выясним, для каких a неравенство $a^2-15a-(t-1)(t+2)(t+5)(t+8)<35$ выполняется при любом действительном t.

Имеем $(t-1)(t+8)(t+2)(t+5)>a^2-15a-35,\ (t^2+7t-8)(t^2+7t+10)>a^2-15a-35,$
$z=t^2+7t+1, (z-9)(z+9)>a^2-15a-35,\ z^2>a^2-15a+46,$
$0>a^2-15a+46,\ \sqrt{D}=\sqrt{41},\ \ (15-\sqrt{41})/2<a<(15-\sqrt{41})/2,\Rightarrow a=10.$

Ответ: 10.

4. Даны шесть носков, все разной окраски и легко растяжимы. Выворачивать их наизнанку нельзя. Сколькими способами можно надеть по 3 носка на каждую ногу, учитывая какой надевать раньше, какой позже? (12 баллов)

Решение. Имеется последовательность из 6 надеваний носков: $C_6^3 = 20$ способами выберем, какие надевания – на правую ногу. При каждом таком выборе можно выбрать 6!=720 способами, при каком надевании какой носок брать.

Ответ: 14400.

5. Пусть $x,\ y,\ z$ – корни уравнения $t^3 - 2t^2 - 9t - 1 = 0$. Найти $\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{x\ y}{z}$. (12 баллов)

Решение. Приведем искомое выражение к общему знаменателю: $\frac{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}{xyz}$. Многочлен имеет 3 разных действительных корня, т.к. P(-100) < 0, P(-1) > 0, P(0) < 0, P(100) > 0. По теореме Виета x+y+z=2, xy+xz+yz=-9, xyz=1.

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = (xy + xz + yz)^2 - 2(x^2yz + y^2xz + z^2xy)$$
$$= (xy + xz + yz)^2 - 2xyz(x + y + z) = 81 - 2 * 1 * 2 = 77.$$

Ответ: 77.

6. На плоскости xOy прямые $y = 3x - 3$ и $x = -1$ пересекаются в точке B, а прямая, проходящая через точку $M(1;2)$, пересекает заданные прямые соответственно в точках A и C. При каком положительном значении абсциссы точки A площадь треугольника ABC будет наименьшей?

(12 баллов)

Решение.

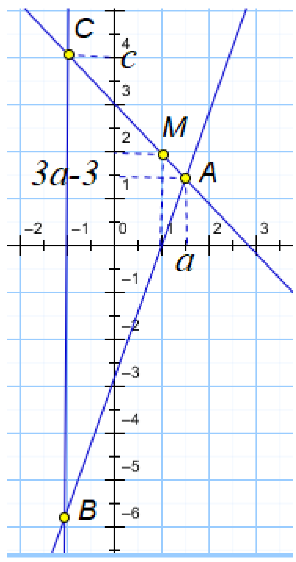
$$AC:\quad y = kx + d,\quad M \in AC \Rightarrow d = 2 - k$$

$$A(a;3a-3) \in AC \Rightarrow 3a - 3 = ka + 2 - k \Rightarrow a = \frac{5-k}{3-k},$$

$$C(-1;c) \in AC \Rightarrow c = -2k + 2,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(c+6)\cdot(a+1) = \frac{2(k-4)^2}{3-k},$$

$$S' = \frac{2(k-4)(2-k)}{(3-k)^2} = 0,\ k_{\min} = 2,\quad a_{\min} = 3.$$



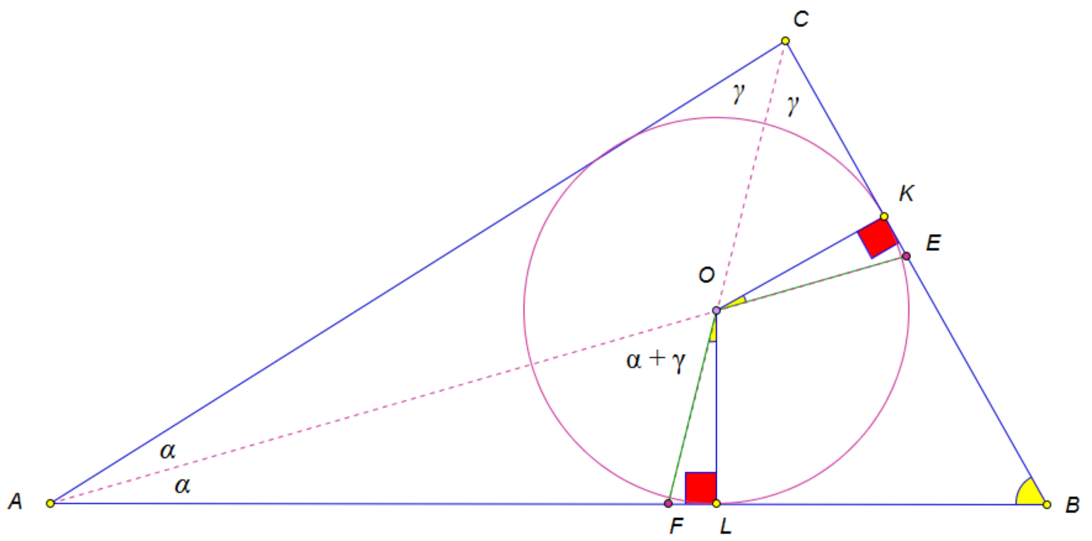
Ответ: 3.

7. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$ проведены биссектрисы AE и CF, которые пересекаются в точке O, причем $OE = OF$. Найдите квадрат медианы треугольника ABC, проведенной из вершины B. (16 баллов)

Решение.

1. Обозначив ∠A = 2α, ∠C = 2γ, вычислим величину углов ∠AOF = ∠COE. Эти углы являются внешними для треугольника AOC. И значит, ∠AOF = ∠COE = α + γ.

2. Из точки O опустим высоты OL и OK на основания AB и BC, соответственно. При этом OL= OK (радиус вписанной окружности) и OF = OE (по условию). Отсюда следует, что ∠FOL = ∠KOE.



3. Заметим, что основание K высоты OK может оказаться как по одну, так и по другую сторону от точки E. Точно также, возможны два варианта расположения точки L по отношению к точке F. Всего получается четыре различных возможных случая. Вычислим и приравняем величины углов ∠FOL и ∠KOE для всех этих четырех случаев.

4. Из прямоугольного треугольника AOL имеем:
∠FOL = ∠AOL - ∠AOF = (π/2 - α) - (α + γ) = π/2 - 2α - γ, если L находится справа от F;
∠FOL = ∠AOF - ∠AOL = (α + γ) - (π/2 - α) = -π/2 + 2α + γ, если L находится слева F.
Аналогично, из прямоугольного треугольника KOE имеем:
∠KOE = ∠COE - ∠COK = (α + γ) - (π/2 - γ) = -π/2 + α + 2γ, если точка K находится выше точки E;
и ∠KOE = ∠COK - ∠COE = (π/2 - γ) - (α + γ) = π/2 - α - 2γ, если точка K находится ниже точки E.

5. Приравниваем величины углов ∠FOL и ∠KOE для этих четырех случаев:
- а) π/2 - 2α - γ = π/2 - α - 2γ ⇒ α = γ ⇒ ∠A = ∠C (равнобедренный треугольник);
- б) π/2 - 2α - γ = -π/2 + α + 2γ ⇒ α + γ = π/3 = 60° ⇒ ∠B = π - 2(α + γ) = π/3 = 60°;
- в) -π/2 + 2α + γ = -π/2 + α + 2γ ⇒ α = γ ⇒ ∠A = ∠C (равнобедренный треугольник);
- г) -π/2 + 2α + γ = π/2 - α - 2γ ⇒ α + γ = π/3 = 60° ⇒ ∠B = π - 2(α + γ) = π/3 = 60°;

6. Учитывая, что треугольник ABC по условию не является равнобедренным, получаем ∠B = 60°.

7. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle B = 13,\ AC = \sqrt{13}.$

8. $m_B^2 = \dfrac{1}{4}(2AC^2 + 2BC^2 - AC^2) = 9,25.$

Ответ: 9,25.

8. Укажите наименьшее целое значение a, при котором существует единственное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{y}{a-\sqrt{x}-1}=4, \\ y=\dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}. \end{cases}$$

(16 баллов)

Решение.

Решая систему методом подстановки, приходим к уравнению с ограничениями на неизвестную величину x.

$$\begin{cases} \dfrac{y}{a-\sqrt{x}-1}=4 \\ y=\dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\neq a-1 \\ \dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}=4(a-\sqrt{x}-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\neq a-1 \\ \sqrt{x}+5=4(a-\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) \end{cases}$$

Для начала проверим, при каких значениях параметра возможен случай $\sqrt{x}=a-1$.

$$4(a-1)^2+(9-4a)(a-1)+(9-4a)=0 \Rightarrow 4(a-1)^2+9a-4a^2=0 \Rightarrow a=-4.$$

При этом значении параметра получим корень равный отрицательному числу, что невозможно.

Решаем квадратное уравнение $4x+(9-4a)\sqrt{x}+(9-4a)=0$.

$$D=(4a-9)(4a+7) \Rightarrow \sqrt{x}_{1,2}=\frac{4a-9\pm\sqrt{(4a-9)(4a+7)}}{8}.$$

Единственное неотрицательное решение будет при условиях

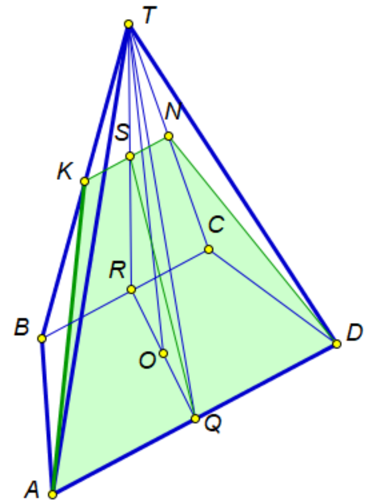
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (4a-9)(4a+7)=0 \\ \dfrac{4a-9}{8}\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a\in(-\infty,-7/4)\cup(9/4,+\infty) \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{9-4a}{4}<0 \\ \begin{cases} x_1x_2=\dfrac{9-4a}{4}=0 \\ x_1+x_2=\dfrac{4a-9}{4}<0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=9/4 \\ a\in(9/4,+\infty) \end{array}\right.$$

выбирая наименьшее целое значение параметра, получим $a=3.$

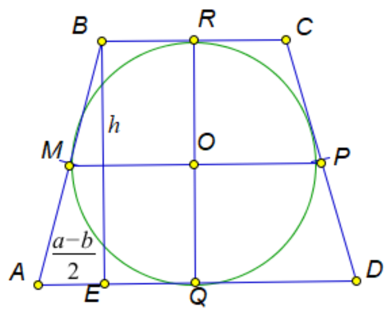
Ответ: 3.

9. Основанием пирамиды TABCD является равнобедренная трапеция ABCD, средняя линия которой равна $5\sqrt{3}$. Отношение площадей частей трапеции ABCD, на которые ее делит средняя линия, равно 7 : 13. Все боковые грани пирамиды TABCD наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем пирамиды TAKND, где точки K и N – середины ребер TB и TC соответственно, AD – большее основание трапеции ABCD. (16 баллов)

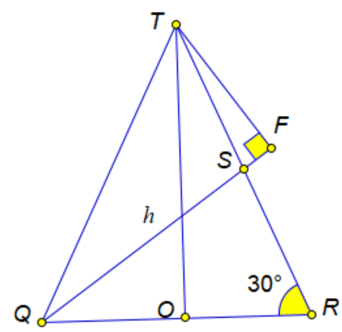
Решение.



Пусть TO – высота пирамиды. Поскольку все боковые грани наклонены к основанию под одним и тем же углом, то O – центр окружности, вписанной в основание. Пусть MP –средняя линия трапеции, $AD = a,\ BC = b.$ По условию имеем $S_{MBCP} = 7x,\ S_{AMPD} = 13x,$ $\dfrac{7}{13} = \dfrac{b+5\sqrt{3}}{a+5\sqrt{3}},\ a+b = 10\sqrt{3},$ $a = 8\sqrt{3},\ b = 2\sqrt{3}.$ Поскольку в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, то $AB + CD = a + b,$ $AB = CD = 5\sqrt{3}.$ Вычислим высоту трапеции $h = \sqrt{AB^2 - (a-b)^2/4} = 4\sqrt{3}.$ Через точку O проведем прямую, перпендикулярную основаниям трапеции и пересекающую эти основания в точках Q и R, $OR = h$. Поскольку боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $30°$, то высота пирамиды $TO = \dfrac{1}{2}QR\,\mathrm{tg}\,30° = 2.$



Пусть TF – высота пирамиды $TAKND$, TF – перпендикуляр, опущенный из точки T на прямую QS, где S – середина KN. Вычислим объем пирамиды $TAKND$: $V_{TAKND} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{AD+KN}{2}\cdot QS\cdot TF.$ Площадь треугольника TQS можно вычислить двумя способами: $S_{TQS} = \dfrac{QR\cdot TO}{4},\ S_{TQS} = \dfrac{QS\cdot TF}{2},$ $QS\cdot TF = \dfrac{QR\cdot TO}{2},$ и $V_{TAKND} = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{AD+KN}{2}\cdot QR\cdot TO.$ Отсюда получаем $V_{TAKND} = 18.$



Ответ: 18.