Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

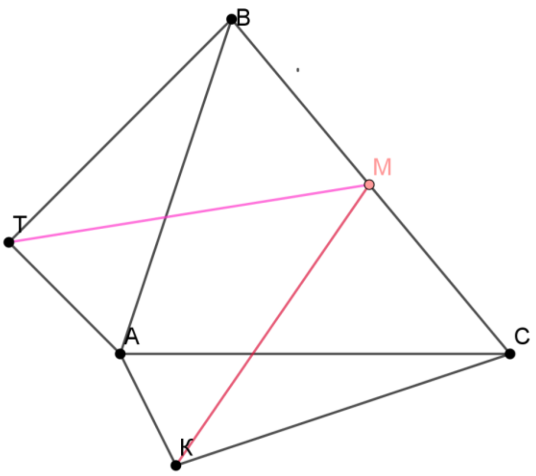
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2019 г.

10 класс

Вариант № 2

№ 1. *(9 баллов)* Две сестры собирали смородину: старшая – в четырёхлитровое ведро, а младшая – в ведёрко вместимостью 3,5 литра. Старшая всё время работала быстрее младшей. Когда старшая сестра собрала три четверти своего ведра, а младшая больше половины своего, девочки поменялись вёдрами. Продолжая работать с такой же скоростью, как до обмена вёдрами, они закончили работу одновременно. Во сколько раз старшая сестра собирала ягоды быстрее младшей?

№ 2. *(9 баллов)* На стороне АВ и АС треугольника АВС, внешним образом построены прямоугольные треугольники АВТ и АСК, так что $\angle ATB = \angle AKC = 90^0$, $\angle ABT = \angle ACK = 30^0$, на стороне ВС выбрана точка М так, что ВМ=МС. Определите градусную меру угла КМТ.



№ 3. *(9 баллов)* В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = 1$, $d = 3$.

Вычислить $A = \dfrac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{a_{1579}} + \sqrt{a_{1580}}}$.

В ответ запишите наименьшее целое число, большее A.

№ 4. *(9 баллов)* В прямоугольнике $ABCD$ $AB : AD = 1 : 2$. Точка M середина AB, точка K принадлежит AD и делит ее в отношении 3:1 считая от точки A. Найти сумму $\angle CAD$ и $\angle AKM$.

№ 5. *(12 баллов)* Имеется два сплава свинца с оловом. В первом сплаве масса свинца относится к массе олова как 1:2; во втором - как 2:3. Сколько граммов первого сплава нужно взять, чтобы получить 22 г нового сплава с отношением масс свинца и олова 4:7?

№ 6. *(12 баллов)* Для всех неотрицательных значений вещественной переменной x функции $f(x)$ выполняется условие $f(x+1)+1 = f(x) + \frac{43}{(x+1)(x+2)}$. Вычислите $\frac{101}{f(2020)}$, если $f(0) = 2020$.

№ 7. *(12 баллов)* Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 35 клеток (35x35 –всего в квадрате 1225 клеток), чтобы из любой незакрашенной его клетки нельзя было попасть ходом шахматного коня в другую незакрашенную.

№ 8. *(14 баллов)* Найдите сумму всех целых значений h, при которых уравнение $||r+h|-2r|-3r=7|r-1|$ относительно r имеет не более одного корня.

№ 9. *(14 баллов)* Таблица, состоящая из 2019 строк и 2019 столбцов заполнена натуральными числами от 1 до 2019 так, что в каждой строке присутствуют все числа от 1 до 2019. Найдите сумму чисел, стоящих на диагонали, которая соединяет левый верхний и правый нижний углы таблицы, если заполнение таблицы симметрично относительно этой диагонали.

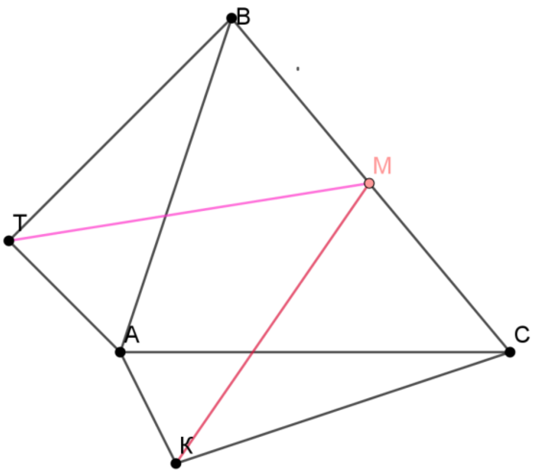
Решение варианта № 2

№ 1. Две сестры собирали смородину: старшая – в четырёхлитровое ведро, а младшая – в ведёрко вместимостью 3,5 литра. Старшая всё время работала быстрее младшей. Когда старшая сестра собрала три четверти своего ведра, а младшая больше половины своего, девочки поменялись вёдрами. Продолжая работать с такой же скоростью, как до обмена вёдрами, они закончили работу одновременно. Во сколько раз старшая сестра собирала ягоды быстрее младшей?

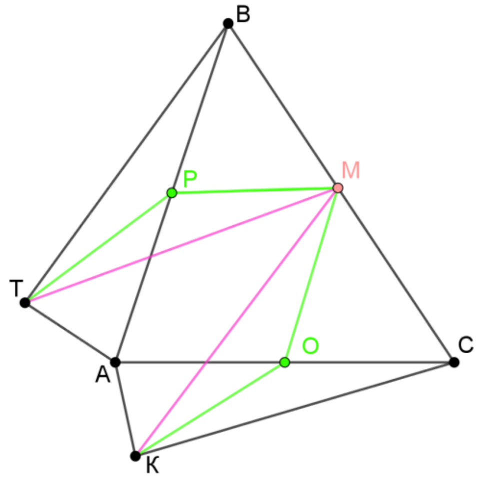
Решение: 0,75·4 = 3 литра ягод собрала старшая сестра к моменту обмена вёдрами. Пусть x литров набрала к этому моменту младшая сестра. Так как скорость работы сестёр одна и та же до и после обмена вёдрами, составим уравнение: $\frac{3}{x}=\frac{3,5-x}{1};3=x(3,5-x)$. Корни уравнения $x_1=2;x_2=1,5$.

Второй корень не подходит по условию задачи, так как к моменту обмена младшая сестра набрала больше половины своего ведра. Подставляя x = 2 в пропорцию, получим, что старшая сестра работала в 1,5 раза быстрее младшей.
Ответ: 1,5.

№ 2. На стороне AB и AC треугольника ABC, внешним образом построены прямоугольные треугольники ABT и ACK, так что $\angle ATB=\angle AKC=90^0$, $\angle ABT=\angle ACK=30^0$, на стороне BC выбрана точка M так, что BM=MC. Определите градусную меру угла KMT.



Решение. На серединах сторон AB и AC отметим точки P и O соответственно. Соединим P с M и T, а O с K и M.



1) $\blacktriangle TPM = \blacktriangle KOM$, по двум сторонам и углу между ними, так как AO= b\2=KO=PM;

AP=c\2= TP=OM; $\angle TPM = \angle TPA + \angle APM = \angle AOK + \angle AOM = \angle KOM$, значит TM=MK, и $\angle PMT = \angle MKO = \alpha$, $\angle PTM = \angle KMO = \beta$,

2) Найдём сумму углов $\angle PMT$ и $\angle KMO$,

$\angle PMT + \angle KMO = \angle MKO + \angle KMO = 180^0 - \angle MOK$. В свою очередь $\angle MOK = 360^0 - \angle KOC - \angle MOC = 360^0 - 120^0 - \angle BAC = 240^0 - \angle BAC$.

3) $\angle KMT = \angle PMO - (\angle PMT + \angle KMO) = \angle BAC - (180^0 - \angle MOK) \Rightarrow$

$\angle KMT = \angle BAC - 180^0 + 240^0 - \angle BAC = 60^0$.

Ответ: 60.

№ 3. В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = 1$, $d = 3$.

Вычислить $A = \dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{a_{1579}}+\sqrt{a_{1580}}}$.

В ответ запишите наименьшее целое число, большее A.

Решение: Преобразуем выражение, домножив числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$A = \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{1579}}+\sqrt{a_{1580}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \ldots + \frac{\sqrt{a_{1580}}-\sqrt{a_{1579}}}{a_{1580} - a_{1579}} =$$

$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d}+\ldots+\frac{\sqrt{a_{1580}}-\sqrt{a_{1579}}}{d}=$$

$$=\frac{\sqrt{a_{1580}}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{\sqrt{a_1+1579d}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{\sqrt{1+1579\cdot 3}-\sqrt{1}}{3}=\frac{\sqrt{4738}-1}{3}$$

Оцениваем значение A: $22<\frac{\sqrt{4738}-1}{3}<23$, в ответ записываем наименьшее целое число, большее A.

Ответ: 23.

№ 4. В прямоугольнике $ABCD$ $AB:AD=1:2$. Точка M середина AB, точка K принадлежит AD и делит ее в отношении 3:1 считая от точки A. Найти сумму $\angle CAD$ и $\angle AKM$.

Решение:

Достроим прямоугольник $ABCD$ до квадрата $AEFD$ со стороной AD.

Пусть $L\in EF, EL:LF=1:3$,

$\Delta MEL=\Delta AKM \Rightarrow \angle EML=\angle AKM$

$N\in FD, FN=NC, MR \parallel AD \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow$

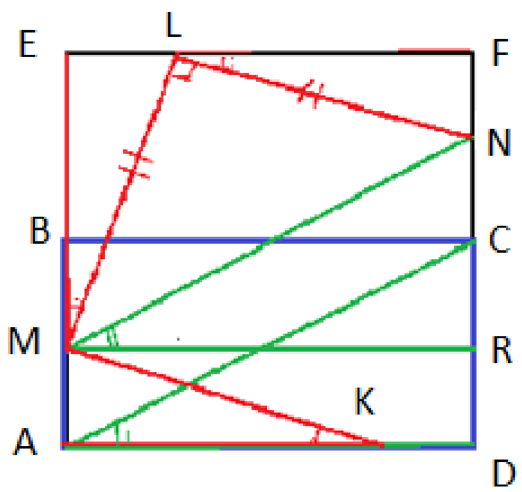
$\Rightarrow \angle NMR=\angle CAD.$

$\Delta EML=\Delta LFN, ML=LN,\ \angle MLN=90^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle LMN=45^0$

$\angle CAD+\angle AKM=\angle NMR+\angle EML=$

$=90^0-\angle LMN=90^0-45^0=45^0.$



Ответ: 45.

№ 5. Имеется два сплава свинца с оловом. В первом сплаве масса свинца относится к массе олова как 1:2; во втором - как 2:3. Сколько граммов первого сплава нужно взять, чтобы получить 22 г нового сплава с отношением масс свинца и олова 4:7?

Решение. Пусть в первом сплаве x г свинца и 2x г олова. Во втором сплаве 2y г свинца и 3y г олова. Тогда $k\cdot 3x+n\cdot 5y=22;\frac{kx+n\cdot 2y}{k\cdot 2x+n\cdot 3y}=\frac{4}{7};$ найти нужно $k\cdot 3x$ и $5ny$. Обозначим $ny=b;kx=a.\frac{a+2b}{2a+3b}=\frac{4}{7};7a+14b=8a+12b;2b=a$. Используем первое уравнение $3a+5b=22;11b=22;b=2;a=4$. Значит, $k\cdot 3x=12;\ 5ny=10$.

Ответ: 12.

№ 6. Для всех неотрицательных значений вещественной переменной x функции $f(x)$ выполняется условие $f(x+1)+1=f(x)+\frac{43}{(x+1)(x+2)}$. Вычислите $\frac{101}{f(2020)}$, если $f(0)=2020$.

Решение.

Заметим, что

$f(x+2020)-f(x) = \big(f(x+2020)-f(x+2019)\big)+\big(f(x+2019)-f(x+2018)\big)+\dots+\big(f(x+1)-f(x)\big) = \frac{43}{(x+2020)(x+2021)}-1+\frac{43}{(x+2019)(x+2020)}-1+\dots+\frac{43}{(x+1)(x+2)}-1.$ Таким образом, $f(2020)-f(0) = 43\left(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021}+\dots+1-\frac{1}{2}\right)-2020 = 43\left(1-\frac{1}{2021}\right)-2020.$ Следовательно, $\frac{101}{f(2020)}=\frac{47}{20}=2{,}35.$

Ответ: 2,35.

№ 7. Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 35 клеток (35x35 – всего в квадрате 1225 клеток), чтобы из любой незакрашенной его клетки нельзя было попасть ходом шахматного коня в другую незакрашенную.

Решение.

Закрашивать надо в шахматном порядке. Таким образом, будет закрашено $[\frac{N^2}{2}]$ клеток. Так как любой «ход коня» приходится на клетку другого цвета, то на клетку такого же цвета хода нет. «Ходом коня» можно обойти любую квадратную таблицу (большую 4x4) так, чтобы конь побывал на каждой ее клетки ровно один раз (см. табл. 5x5). Если пронумеровать эти ходы, то очевидно, что меньше $[\frac{N^2}{2}]$ клеток окрасить нельзя потому, что тогда в этой последовательности обязательно найдутся две подряд неокрашенные, т.е. будет возможен ход с одной из них на другую. Таблицу 35x35 нужно разбить на 49 таблиц 5x5, а нумеровать поочередно, начиная с первой таблицы 5x5. $\left[\frac{35^2}{2}\right]=612.$

21	16	5	10	23	
6	11	22	17	4	
1	20	15	24	9	26
12	7	18	3	14	
19	2	13	8	25	

Ответ: 612.

№ 8. Найдите сумму всех целых значений h, при которых уравнение ||r+h|-2r|-3r=7|r-1| относительно r имеет не более одного корня.

Решение:

Рассмотрим функцию f(r)=7|r-1|+3r-||r+h|-2r|. Коэффициент при первом модуле по модулю больше суммы остальных коэффициентов при r. 7>3+2+1. Отсюда следует, что на всех интервалах до r=1 коэффициент линейного приращения отрицателен, а после r=1 - положителен. r=1 - точка минимума. Для того, чтобы уравнение f(r)=0 имело не более одного корня необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

f(1) ≥ 0

$\Rightarrow$ Возьмём $|h+1|=t$; $3-|t-2| \geq 0$
$(t-2)^2-3^2 \leq 0$
$(t-5)(t+1) \leq 0$
$t \in [-1;5]$
$|h+1| \leq 5$
Ответ: -11.

№ 9. Таблица, состоящая из 2019 строк и 2019 столбцов заполнена натуральными числами от 1 до 2019 так, что в каждой строке присутствуют все числа от 1 до 2019. Найдите сумму чисел, стоящих на диагонали, которая соединяет левый верхний и правый нижний углы таблицы, если заполнение таблицы симметрично относительно этой диагонали.

Решение:
Покажем, что на диагонали присутствуют все числа от 1 до 2019. Пусть число $a \in \{1, 2, 3..., 2019\}$ не стоит на диагонали. Тогда в силу симметрии таблицы, число a встречается чётное количество раз. С другой стороны, так как число a по одному разу встречается в каждой строке, всего в таблице чисел a нечётное количество (2019). Получили противоречие.

Всего на диагонали 2019 клеток, поэтому каждое число из множества $\{1, 2, ...2019\}$ встретится на диагонали ровно по одному разу. Вычисляя сумму арифметической прогрессии, находим ответ.

Ответ:2039190.