Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

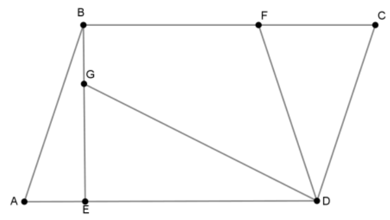
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2019 г.

10 класс

Вариант № 1

№ 1. *(9 баллов)* Увидев лису в нескольких метрах от себя, собака погналась за ней по прямой просёлочной дороге. Прыжок собаки на 23% длиннее прыжка лисы. Существует промежуток времени, за который и лиса, и собака делают по целому числу прыжков. При этом каждый раз оказывается, что собака за это время успевает сделать на t% прыжков меньше, чем лиса, где t – целое число. Предполагая, что все прыжки и у собаки, и у лисы одинаковы, найдите, при каком минимальном значении t лиса сможет убежать от собаки?

№ 2. *(9 баллов)* В параллелограмме ABCD высота BE=3, AE: ED=1:4. сторона BC=5. На отрезках BE и BC отмечены точки G и F соответственно, так что BG: GE=1:2, BF: FC=3:2. Определите градусную меру угла FDG.



№ 3. *(9 баллов)* В арифметической прогрессии (a_n) $a_{1000}=150$, $d=0,5$.

Вычислить: $99\cdot100\cdot\left(\dfrac{1}{a_{1580}\cdot a_{1581}}+\dfrac{1}{a_{1581}\cdot a_{1582}}+\ldots+\dfrac{1}{a_{2019}\cdot a_{2020}}\right)$.

№ 4. *(9 баллов)* В $\triangle ABC$ с $\angle B=120^0$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1.
Найти $\angle C_1B_1A_1$.

№ 5. *(12 баллов)* Скупщики расплачиваются с ловцами жемчуга золотом и кукурузой. Посовещавшись, скупщики решили снизить цену «в золоте» на 5% на первом острове. Тогда «в кукурузе» цена упадет на 7%, так как цены золота и кукурузы связаны на рынке.
А для ловцов жемчуга второго острова из-за пришедшего холодного течения решили снизить цену меньше – «в золоте» на 1%. На сколько процентов упадет цена жемчуга «в кукурузе» для ловцов второго острова? Ответ округлите до сотых после запятой.

№ 6. *(12 баллов)* Какое наименьшее значение может принимать функция $F(x;y)=x^2+8y+y^2+14x-6$, при условии, что $x^2+y^2+25=10(x+y)$.

№ 7. *(12 баллов)* Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 35 клеток (35х35 – всего в квадрате 1225 клеток), чтобы среди любых четырех его клеток, образующих уголок (фигуру «Г»), обязательно была хотя бы одна закрашенная.

№ 8. *(14 баллов)* Найдите сумму всех целых значений с, при которых уравнение $15|p-1|+|3p-|p+c||=4p$ относительно р имеет хотя бы один корень.

№ 9. *(14 баллов)* Известно, что число вхождений некоторого символа в текст составляет от 10,5% до 11% длины текста (под длиной текста понимаем общее количество символов в тексте). Найдите минимально возможную длину текста.

Решение варианта № 1

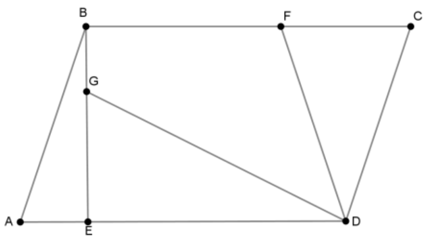
№1. Увидев лису в нескольких метрах от себя, собака погналась за ней по прямой просёлочной дороге. Прыжок собаки на 23% длиннее прыжка лисы. Существует промежуток времени, за который и лиса, и собака делают по целому числу прыжков. При этом каждый раз оказывается, что собака за это время успевает сделать на t% прыжков меньше, чем лиса, где t – целое число. Предполагая, что все прыжки и у собаки, и у лисы одинаковы, найдите, при каком минимальном значении t лиса сможет убежать от собаки?

Решение: Пусть x – длина прыжка лисы, y – количество прыжков, которое она делает в некоторую единицу времени. Тогда xy - путь, пройденный лисой за это время. Путь, пройденный за то же время собакой - $1,23x(1-\frac{t}{100})y$. Лиса убежит от собаки, если $1,23x(1-\frac{t}{100})y < xy$;

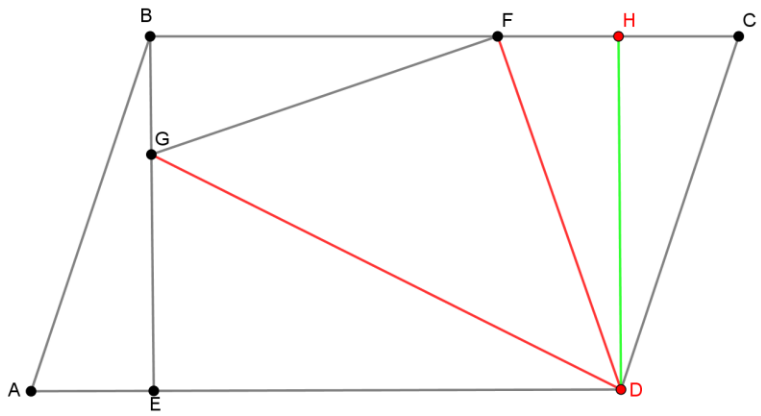
$1,23(100-t) < 100; 23 < 1,23t$; $t > \frac{23}{1,23}; t > 18\frac{86}{123}$, при $t = 19\%$.

Ответ: 19.

№ 2. В параллелограмме ABCD высота BE=3, AE: ED=1:4. сторона BC=5. На отрезках BE и BC отмечены точки G и F соответственно, так что BG: GE=1:2, BF: FC=3:2. Определите градусную меру угла FDG.



Решение. Построим высоту DH и соединим точки F и G.



1) $\blacktriangle BFG=\blacktriangle DFH$ - по двум катетам, так как $BF=DH=3$; $BG=FH=1$, поэтому $FG=FD,$ $\angle BFG=\angle FDH=\alpha$ и $\angle DFH=\angle BGF=90^0-\alpha.$

2) $\blacktriangle DFG$ - прямоугольный равнобедренный, так как $FG=FD,$ и
$\angle BFG+\angle GFD+\angle DFH=180^0.$ $\angle GFD=180^0-\angle BFG-\angle DFH.$
$\angle GFD=180^0-\alpha-90^0+\alpha=90^0.$ Значит $\angle FDG=45^0.$

Ответ: $\angle FDG=45^0.$

№ 3. В арифметической прогрессии (a_n) $a_{1000}=150,\ d=0,5$.

Вычислить: $99\cdot100\cdot\left(\dfrac{1}{a_{1580}\cdot a_{1581}}+\dfrac{1}{a_{1581}\cdot a_{1582}}+...+\dfrac{1}{a_{2019}\cdot a_{2020}}\right).$

Решение: Выражение в скобке состоит из нескольких слагаемых вида $\dfrac{1}{x\cdot(x+d)}$, которые можно разложить в сумму простейших дробей: $\dfrac{1}{x\cdot(x+d)}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+d}\right)$. Преобразуем исходное выражение: $99\cdot100\cdot\left(\dfrac{1}{a_{1580}\cdot a_{1581}}+\dfrac{1}{a_{1581}\cdot a_{1582}}+...+\dfrac{1}{a_{2019}\cdot a_{2020}}\right)=$

$$=99\cdot100\cdot\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{1580}}-\frac{1}{a_{1581}}+\frac{1}{a_{1581}}-\frac{1}{a_{1582}}+...+\frac{1}{a_{2019}}-\frac{1}{a_{2020}}\right)=$$

$$=99\cdot100\cdot\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{1580}}-\frac{1}{a_{2020}}\right)=99\cdot100\cdot\frac{1}{d}\left(\frac{a_{2020}-a_{1580}}{a_{2020}\cdot a_{1580}}\right)=99\cdot100\cdot\frac{1}{d}\left(\frac{(2019-1579)d}{a_{2020}\cdot a_{1580}}\right)=$$

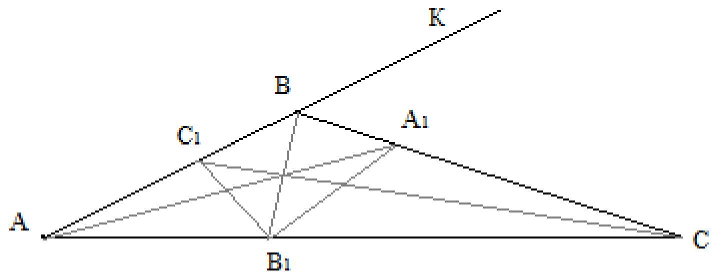
$$=99\cdot100\cdot\frac{1}{d}\left(\frac{(2019-1579)d}{a_{2020}\cdot a_{1580}}\right)=99\cdot100\cdot\frac{1}{d}\cdot\frac{440d}{660\cdot440}=15,$$

так как $a_{2020}=a_{1000}+1020d=150+1020\cdot0,5=660$, а
$a_{1580}=a_{1000}+580d=150+580\cdot0,5=440$.

Ответ: 15.

№ 4. В $\triangle ABC$ с $\angle B=120^0$ проведены биссектрисы AA_1,BB_1,CC_1.
Найти $\angle C_1B_1A_1$.
Решение.
Продолжим сторону AB за точку B, тогда BC биссектриса угла $\angle B_1BK$, а значит точка A_1 равноудалена от сторон B_1B и BK.

Учитывая, что точка A_1 лежит на биссектрисе $\angle BAC$, а значит и равноудалена от его сторон получаем, что A_1 равноудалена от сторон B_1B и B_1C, а значит лежит на биссектрисе $\angle BB_1C$.
Аналогично доказываем, что B_1C_1 биссектриса $\angle AB_1B$.
Следовательно $\angle C_1B_1A_1 = 90^0$, как угол между биссектрисами смежных углов.
Ответ: $\angle C_1B_1A_1 = 90^0$



№ 5. Скупщики расплачиваются с ловцами жемчуга золотом и кукурузой. Посовещавшись, скупщики решили снизить цену «в золоте» на 5% на первом острове. Тогда «в кукурузе» цена упадет на 7%, так как цены золота и кукурузы связаны на рынке.
А для ловцов жемчуга второго острова из-за пришедшего холодного течения решили снизить цену меньше – «в золоте» на 1%. На сколько процентов упадет цена жемчуга «в кукурузе» для ловцов второго острова? Ответ округлите до сотых после запятой.

Решение. Пусть х- исходная цена жемчуга; для первого острова: 0,95х «в золоте»; 0.93х - в «кукурузе». Их отношение $\frac{95}{93}$ постоянно на рынке. Для второго острова: 0,99х в «золоте», у- в «кукурузе»; $\frac{0,99x}{y} = \frac{95}{93}; y = \frac{0,99x \cdot 93}{95}$. Подешевел жемчуг на $(1 - \frac{0,99 \cdot 93}{95})x = \frac{95 - 92,07}{95}x = \frac{2,93}{95}x$. В процентах $\frac{2,93x \cdot 100\%}{95x} = \frac{293}{95} = 3,08$

Ответ: 3,08.

№ 6. Какое наименьшее значение может принимать функция $F(x;y) = x^2 + 8y + y^2 + 14x - 6$, при условии, что $x^2 + y^2 + 25 = 10(x + y)$.

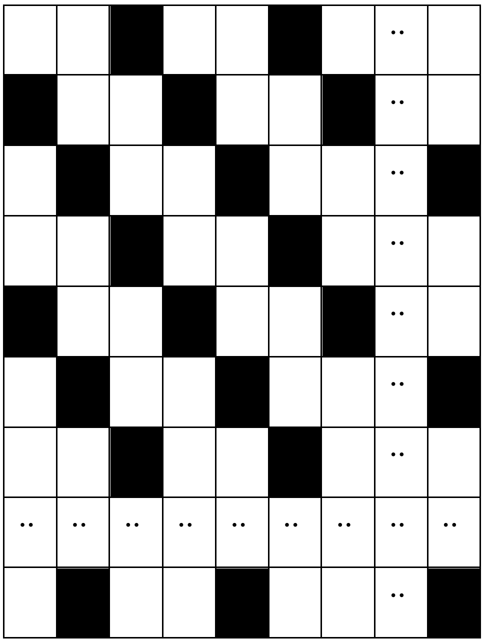
Решение.

$x^2 + y^2 + 25 = 10(x + y) \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$ – это окружность с центром (5;5) и радиусом 5.
Пусть $F(x;y) = M$, тогда $(x+7)^2 + (y+4)^2 = (M+71)$ – это окружность с центром (–7;–4) и радиусом $(M+71)^{0,5}$.
Так как центр второй окружности лежит вне первой, то условие минимума функции равносильно условию минимума М, при котором окружности пересекутся, а это точка касания двух окружности. То есть сумма радиусов двух окружностей должна равняться расстоянию между их ценртами. $(10 + (M+71)^{0,5})^2 = (5+7)^2 + (5+4)^2 \Rightarrow (M+71)^{0,5} = 10 \Rightarrow M = 29$.
Ответ: 29.

№ 7. Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 35 клеток (35х35 – всего в квадрате 1225 клеток), чтобы среди любых четырех его клеток, образующих уголок (фигуру «Г»), обязательно была хотя бы одна закрашенная.

Решение.

Закрашивать надо по диагонали каждую 3-ю (см. рис.). Таким образом, будет закрашено $\left[\frac{N^2}{3}\right]$ клеток. Это минимально возможное количество, так как внутри любого квадрата 3х3 нужно закрашивать не менее трех клеток. $\left[\frac{35^2}{3}\right] = 408.$



Ответ: 408.

№ 8. Найдите сумму всех целых значений c, при которых уравнение 15|p-1|+|3p-|p+c||=4p относительно p имеет хотя бы один корень.

Решение:

Рассмотрим функцию f(r)= 15|p-1|+|3p-|p+c||-4p. Коэффициент при первом модуле по модулю больше суммы остальных коэффициентов при p. 15>4+1+3. Отсюда следует, что на всех интервалах до p=1 коэффициент линейного приращения отрицателен, а после p=1 - положителен. p=1 - точка минимума. Для того, чтобы уравнение f(p)=0 имело хотя бы один корень необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$f(1) \leq 0$

$\Rightarrow$ Возьмём |c+1|=t; $|3-t|-4 \leq 0$

$(3-t)^2-4^2 \geq 0$

$(7-t)(-1-t) \geq 0$

$t \in [-1;7]$

$|c+1| \leq 7$

Ответ: -15.

№ 9. Известно, что число вхождений некоторого символа в текст составляет от 10,5% до 11% длины текста (под длиной текста понимаем общее количество символов в тексте). Найдите минимально возможную длину текста.

Решение:

Пусть длина текста равна L. Пусть символ встречается в тексте x раз. Задачу можно переформулировать так: найдите наименьшее натуральное число L, для которого существует такое натуральное число x, что $\frac{10{,}5}{100} < \frac{x}{L} < \frac{11}{100}$. Чем меньше x, тем меньше соответствующее L (при малых x это действительно так). При x=1 не существует удовлетворяющего неравенству натурального L. При x=2 находим, решая неравенство, что L=19. Из неравенства $L \geq \frac{100x}{11}$ заключаем, что $L > 19$ при $x \geq 3$.

Ответ: 19.