Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», весна 2020 г.

9 класс

Вариант № 7

1. *(10 баллов)* Решить неравенство:

$$2\sqrt{(4x-9)^2}+\sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leq 18-8x.$$

2. *(15 баллов)* Площадь равнобедренной трапеции равна 100, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите высоту этой трапеции.

3. *(15 баллов)* В шляпной коробке 21 шляпка и 18 кепок. Их распределили по двум полкам: на первой должно поместиться 20 предметов, а на второй — 19. После распределения посчитали процент шляпок на каждой полке и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение шляпок на полках, чтобы полученная сумма была наибольшей?

4. *(20 баллов)* Определите количество решений уравнения $a(x-|x|+2)=|x-3|-2$ при каждом значении параметра a.

5. *(20 баллов)* В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90^{\circ}$) со стороной $BC=a$ точки M и N являются серединами сторон AB и BC, соответственно. Биссектриса $\angle A$ пересекает прямую MN в точке L. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ACL, если угол $\angle CBL=\alpha$.

6. *(20 баллов)* Является ли число 390629 простым? Дать обоснованный ответ (без использования калькулятора).

Решение варианта № 7

1. (10 баллов) Решить неравенство:

$$2\sqrt{(4x-9)^2}+\sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leq 18-8x.$$

Решение. Так как $\sqrt{(4x-9)^2}$=$|4x-9|$, то имеем

$$2|4x-9|+\sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leq 18-8x. \qquad (1)$$

Левая часть (1) больше или равна 0 как сумма неотрицательных модуля и квадратного корня. Тогда и правая часть (1) тоже будет больше или равна 0, т.е.

$$18-8x\geq 0, x\geq 0 \ \Rightarrow x \ \in \ \left[0;\frac{9}{4}\right]. \qquad (*)$$

Тогда $|4x-9|=9-4x$ и (1) примет вид

$$2(9-4x)+\sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leq 18-8x \Leftrightarrow \sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x}-5+2|x-2|=0. \qquad (2)$$

Замена $\sqrt{x}=t\geq 0,\, x=t^2$.

Уравнение (2) примет вид: $\begin{cases}2|t^2-2|+3t-5=0\\ t\geq 0\end{cases}$.

Рассмотрим два случая:

1.

$$\begin{cases}-2t^2+3t-1=0\\ 0\leq t<\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

2.

$$\begin{cases}2t^2+3t-9=0\\ \sqrt{2}\leq t<+\infty\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(t+3)\left(t-\frac{3}{2}\right)=0\\ \sqrt{2}\leq t<+\infty\end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{3}{2}.$$

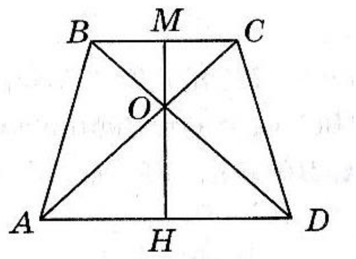
Учитывая (*), вернемся к x: $x=\frac{1}{4};\quad 1;\quad \frac{9}{4}$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{4}\right\}\cup\{1\}\cup\left\{\frac{9}{4}\right\}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	10
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	10

2. (15 баллов) Площадь равнобедренной трапеции равна 100, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите высоту этой трапеции.

Решение. Пусть $ABCD$ - равнобедренная трапеция, диагонали AC и BD которой взаимно перпендикулярны. Обозначим $O = AC \cap BD$, точка M - середина BC, точка H - середина AD. Проведём отрезок $MH : O \in MH, MH \perp AD$. Так как MH - ось симметрии данной трапеции, то $OB = OC, OA = OD$. Поэтому прямоугольные треугольники BOC и AOD - равнобедренные, значит , $\angle OBM = \angle OAH = 45^o$. Тогда прямоугольные треугольники MOB и AOH также являются равнобедренными: $OM = BM, OH = AH.$



Имеем:

$OM = BM = 0,5BC, OH = AH = 0,5AD \Rightarrow MH = OM + OH = 0,5BC + 0,5AD =$
$= 0,5\left(BC + AD\right)$, то есть высота MH трапеции равна её средней линии. Это значит, что для площади данной трапеции получаем: $S_{ABCD} = 0,5\left(BC + AD\right)MH = MH \cdot MH = MH^2$. Тогда $MH = \sqrt{S_{ABCD}} = \sqrt{100} = 10$.

Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	15
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	10
В решении задачи верно выписаны одна-две формулы, являющиеся началом возможного решения.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, описанных выше.	0
Максимальный балл	15

3. (15 баллов). В шляпной коробке 21 шляпка и 18 кепок. Их распределили по двум полкам: на первой должно поместиться 20 предметов, а на второй — 19. После распределения посчитали процент шляпок на каждой полке и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение шляпок на полках, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Решение. ***Решение 1.*** Вместо суммарного процента будем считать суммарную долю шляпок — очевидно, эти числа отличаются в 100 раз и достигают своего максимума одновременно. Каждая шляпка на полке из 20 предметов составляет $1/20$ от общего числа предметов на этой полке, а на полке из 19 предметов $1/19$ — от общего числа предметов. Значит, если поменять местами шляпки на полке с большим количеством предметов на кепки с полки с меньшим количеством предметов, суммарный процент шляпок на полках вырастет. Таким образом, максимум достигается, когда все подобные перестановки сделаны, то есть, когда полке с меньшим количеством предметов полностью состоит из шляпок, а в полке с большим количеством предметов — 2 шляпки и 18 кепок.

Решение 2.

	Общее число предметов	шляпки	Доля на каждой полке
1 полка	20 штук	x	$x/20$
2 полка	19 штук	21-x	$\left(21-x\right)/19$

Значит, суммарная доля шляпок в двух полках равна $\frac{x}{20}+\frac{21-x}{19}=-\frac{x}{20\cdot 19}+\frac{21}{19}=-\frac{x}{380}+\frac{21}{19}$ и представляет собой линейную функцию с отрицательным угловым коэффициентом. Значит, эта функция достигает своего наибольшего значения на левом конце промежутка [2; 20], то есть при x=2. Таким образом, на полке с меньшим количеством предметов размещены только шляпки, а на полке с большим количеством предметов — 2 шляпки и 18 кепок.

Ответ: На второй полке — 19 шляпок, на первой — 2 шляпки и 18 кепок.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	15
При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка.	10
Решено подбором значений переменных, удовлетворяющих условию задачи.	5
Наблюдаются отдельные шаги возможного решения.	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	15

4. (20 баллов) Определите количество решений уравнения $a(x-|x|+2)=|x-3|-2$ при каждом значении параметра a.

Решение. Раскроем модули и исследуем отдельно три случая:

1) $x\in(-\infty;0)$ $a(2x+2)=1-x$; $x(2a+1)=1-2a$. При $a=-0,5$ уравнение не имеет решений при этих x, поделим на коэффициент, $x=\frac{1-2a}{1+2a}$. Решим неравенство $\frac{1-2a}{1+2a}<0$; $a\in(-\infty;-0,5)\cup(0,5;+\infty)$ - существует одно решение, $a\in\left[-0,5;0,5\right]$ - решений нет.

2) $x\in\left[0;3\right]$ $2a=1-x;\ x=1-2a$; $\begin{cases}1-2a\ge 0\\ 1-2a\le 3\end{cases}$; $a\in\left[-1;0,5\right]$ - одно решение, $a\in(-\infty;-1)\cup(0,5;+\infty)$ - решений нет.

3) $x\in(3;+\infty)$ $2a=x-5$; $x=2a+5$; $2a+5>3;\ a>-1$; $a\in(-1;+\infty)$ - одно решение; $a\in(-\infty;-1]$ - решений нет. Обобщая полученные результаты, получим ответ.

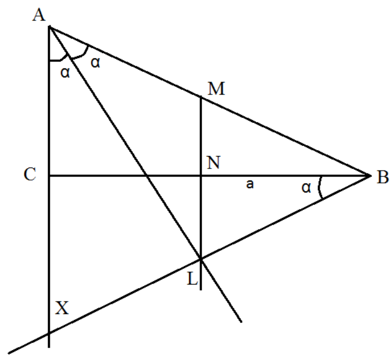
Эту задачу можно решать и графически в системе координат Oxa.

Ответ: При $a\in(-\infty;-1)$ - одно решение; при $a=-1$ - два решения; при $a\in(-1;-0,5)$ - три решения; при $a\in[-0,5;+\infty)$ - два решения.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	20
Ответ отличается от правильного одной-двумя точками (крайними в интервалах или отдельными).	15
Правильно раскрыты модули и исследовано количество решений в каждом из трёх случаев, но сопоставление результатов делается неверно; или к неправильному ответу привела ошибка в одном из случаев раскрытия модуля.	10
Верно раскрыты модули и правильно исследован хотя бы один из случаев, но дальнейшего решения нет или оно неверно.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

5. (20 баллов) В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C = 90^{\circ})$ со стороной $BC = a$ точки M и N являются серединами сторон AB и BC, соответственно. Биссектриса $\angle A$ пересекает прямую MN в точке L. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ACL, если угол $\angle CBL = \alpha$.

Решение.



Проведем прямую BL, пересекающую AC в точке X. Тогда в ΔABX биссектриса AL является медианой, следовательно, и высотой. Значит, $\angle ALB = 90^{0}$ и точки $A, \mathrm{B}, \mathrm{L}, \mathrm{C}$ лежат на одной окружности, следовательно, $\angle CBL = \angle CAL$, как опирающиеся на одну дугу и радиус окружности описанной около ΔCAL равен радиусу окружности около ΔCAB и равен половине AB. Откуда $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2\sin 2\alpha}$. **Ответ:** $\dfrac{a}{2\sin 2\alpha}$.

Содержание критерия	Баллы
Задача решена верно.	20
Доказано, что $\angle CBL = \angle CAL$.	15
Доказано, что точки $A, \mathrm{B}, \mathrm{L}, \mathrm{C}$ лежат на одной окружности.	10
Доказано $\angle ALB = 90^{0}$.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

6. (20 баллов) Является ли число 390629 простым? Дать обоснованный ответ (без использования калькулятора).

Решение. Так как $25^4 = 390625$, то

$390629 = 25^4 + 4 = 25^4 + 4 + 4 \cdot 25^2 - 4 \cdot 25^2 == (25^2 + 2)^2 - 50^2 = 577 \cdot 677.$

Второй способ.

$390629 \cdot 256 = 10001024 = 10^8 + 2^{10} = 2^8(5^8 + 4);\ 390629 = (5^4 + 2)^2 - 50^2 = 577 \cdot 677.$

Ответ: Нет.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	20
Получен правильный ответ, но решение недостаточно обосновано.	14
Приведено начало возможного решения задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.	6
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20