Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», весна 2020 г.

9 класс

Вариант № 1

1. *(10 баллов)* Решите неравенство: $3\sqrt{x+4} \leq 5 - 2|x+2|$.

2. *(15 баллов)* Две медианы треугольника, равные 18 и 24, взаимно перпендикулярны. Найдите длину третьей медианы этого треугольника.

3. *(15 баллов)* Степан и Павел готовили корм для лошадей из овса, кукурузы и сена. Известно, что Степан заготовил корм, содержащий 40% сена, а Павел – 26% овса. Процентное содержание кукурузы в первом и втором наборах одинаковое. Перемешав 150кг заготовки собранной Степаном и 250 кг Павлом, получили новый набор, в котором оказалось 30% кукурузы. Определите, сколько килограмм сена содержится в получившемся сборе.

4. *(20 баллов)* Определите, при каких значениях параметра a уравнение $(a+1)(x^2+1)^2-(2a+3)(x^2+1)x+(a+2)x^2=0$ имеет ровно два различных действительных корня.

5. *(20 баллов)* Дан треугольник KLM. Проведена окружность, проходящая через точку M, касающаяся отрезка LK в точке A, являющейся его серединой и пересекающая стороны ML и MK в точках C и B, соответственно, так, что $CB=4,$ точка C равноудалена от точек A и L, а $\cos\angle K = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$. Найти длину отрезка BK.

6. (20 баллов) Вычислить значение выражения:

$$1\cdot 2\cdot(1+2)-2\cdot 3\cdot(2+3)+3\cdot 4\cdot(3+4)-\cdots+2019\cdot 2020\cdot(2019+2020).$$

Решение варианта № 1

1. (10 баллов) Решите неравенство: $3\sqrt{x+4} \le 5 - 2|x+2|$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 3\sqrt{x+4} - 5 + 2|x+2|$. ОДЗ: $x \ge -4$. Найдем нули этой функции, т.е. решим уравнение $3\sqrt{x+4} = 5 - 2|x+2|$. Обозначим $y = \sqrt{x+4}$. Рассмотрим полученную систему: $\begin{cases} 3y = 5 - 2|y^2 - 2| \\ y \ge 0 \end{cases}$.

Рассмотрим два случая:

1. $\begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{2} \\ 3y = 5 + 2y^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{2} \\ (y-1)\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

2. $\begin{cases} y \ge \sqrt{2} \\ 3y = 5 - 2y^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge \sqrt{2} \\ (y+3)\left(y - \frac{3}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$.

Вернемся к x: $\sqrt{x+4} = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -3, -\frac{15}{4}, -\frac{7}{4}$. Найдем знаки функции $f(x)$ на промежутках: $\left(-\frac{7}{4}, +\infty\right)$, $\left(-3, -\frac{7}{4}\right)$, $\left(-\frac{15}{4}, -3\right)$ и $\left(-4, -\frac{15}{4}\right)$:

$f(0) = 6 - 5 + 4 > 0$,

$f(-2) = 3\sqrt{2} - 5 < 0$,

$f\left(-\frac{13}{4}\right) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 + 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{3\sqrt{3} - 5}{2} > 0$, т.к. 27>25,

$$f\left(-\frac{31}{8}\right) = 3 \cdot \sqrt{4 - \frac{31}{8}} - 5 + 2 \cdot \left|-\frac{31}{8} + 2\right| = \frac{3\sqrt{2} - 5}{4} < 0.$$

Так как нужно решить неравенство $f(x) \le 0$, то его решение есть множество: $\left[-4; -\frac{15}{4}\right] \cup \left[-3; -\frac{7}{4}\right]$.

Ответ: $\left[-4; -\frac{15}{4}\right] \cup \left[-3; -\frac{7}{4}\right]$.

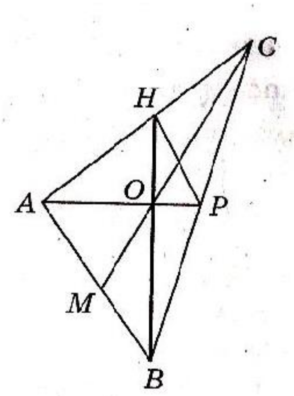
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	10
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	10

2. (15 баллов) Две медианы треугольника, равные 18 и 24, взаимно перпендикулярны. Найдите длину третьей медианы этого треугольника.

Решение. Пусть AP=18 и BH=24. Найдём длину медианы CM. По свойству медиан в ΔABC имеем:

$$AO:OP = BO:OH = 2:1 \Rightarrow AO =$$

$$= \frac{2}{3}AP = \frac{2}{3}\cdot 18 = 12; BO = \frac{2}{3}BH = \frac{2}{3}\cdot 24 = 16.$$



Тогда по теореме Пифагора в прямоугольном $\Delta AOB: AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$. А так как OM – медиана этого треугольника, проведенная из вершины прямого угла, то $OM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 20 = 10$. Учитывая, что $CO:OM = 2:1$, получаем: $CM = 3OM = 3\cdot 10 = 30$.

Ответ: 30.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	15
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	10
В решении задачи верно выписаны одна-две формулы, являющиеся началом возможного решения.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, описанных выше.	0
Максимальный балл	15

3. (15 баллов) Степан и Павел готовили корм для лошадей из овса, кукурузы и сена. Известно, что Степан заготовил корм, содержащий 40% сена, а Павел – 26% овса. Процентное содержание кукурузы в первом и втором наборах одинаковое. Перемешав 150кг заготовки собранной Степаном и 250 кг Павлом, получили новый набор, в котором оказалось 30% кукурузы. Определите, сколько килограмм сена содержится в получившемся сборе.

Решение.

	овёс	кукуруза	сено	масса
Степан		x%	40%	150кг
Павел	26%	x%	74%- x%	250кг
Новый набор		30%		400кг

1.Определим процентное содержание кукурузы: $\frac{x}{100}\cdot 150 + \frac{x}{100}\cdot 250 = 400\cdot 0,3 \Leftrightarrow$

1,5x+2,5x=120, $\Leftrightarrow$ x=30. $\Leftrightarrow$ x=30%.

2. Определим массу сена: $0,4\cdot 150 + 0,44\cdot 250 = 60 + 110 = 170.$

Ответ: 170.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	15
При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка.	10
Решено подбором значений переменной, удовлетворяющих условию задачи.	5
Наблюдаются отдельные шаги возможного решения.	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	15

4. (20 баллов) Определите, при каких значениях параметра a уравнение $(a+1)(x^2+1)^2-(2a+3)(x^2+1)x+(a+2)x^2=0$ имеет ровно два различных действительных корня.

Решение. 1. Заметим, что $x=0$ - решение при $a=-1$. Подставляя это значение параметра в исходное уравнение, получим уравнение $-x(x^2-x+1)=0$, которое не имеет других корней, кроме нуля. Следовательно, если $x=0$ - решение уравнения, то $a=-1$ и, более того, $x=0$ - единственное решение уравнения. Значит, это значение параметра нам не подходит и $x=0$ не может быть одним из двух различных корней этого уравнения.

2. Заметим, что уравнение является однородным относительно множителей (x^2+1) и x^2, и разделим его почленно на x^2. Получим уравнение $(a+1)(x+\frac{1}{x})^2-(2a+3)(x+\frac{1}{x})+a+2=0$.

Сделаем замену $x+\frac{1}{x}=t$ и получим квадратное уравнение относительно переменной t: $(a+1)t^2-(2a+3)t+a+2=0$ (1).

3. Исследуем количество решений уравнения $x+\frac{1}{x}=t$ в зависимости от t. $x^2-tx+1=0$; $D=t^2-4$; $D<0$ при $t\in(-2;2)$; $t=\pm2$ соответствует единственное значение x, а каждому $t\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ соответствует по два различных значения x (также можно использовать известные числовые неравенства для положительных чисел $x+\frac{1}{x}\geq 2$ и для отрицательных $x+\frac{1}{x}\leq -2$, график функции $t=x+\frac{1}{x}$).

4. Исследуем теперь количество решений уравнения (1) с переменной t. Заметим, что t=1 – решение при любом значении параметра. Этому корню в соответствии с вышесказанным не соответствует

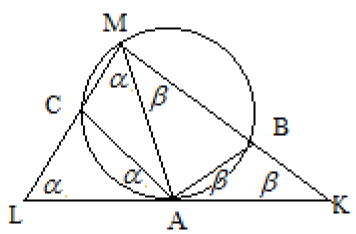
ни одного x. По теореме Виета $t_2 = \dfrac{a+2}{a+1}$. Исходное уравнение имеет два различных корня тогда и только тогда, когда $\left[\begin{array}{l} \dfrac{a+2}{a+1} > 2 \\ \dfrac{a+2}{a+1} < -2 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \dfrac{a+2-2a-2}{a+1} > 0 \\ \dfrac{a+2+2a+2}{a+1} < 0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \dfrac{a}{a+1} < 0 \\ \dfrac{3a+4}{a+1} < 0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} a \in (-1;0) \\ a \in (-\frac{4}{3};-1) \end{array}\right.$.

Ответ: $(-\frac{4}{3};-1) \cup (-1;0)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	20
При верном общем ходе решения ответ отличается от правильного одной-двумя точками.	15
Правильно получен только один из интервалов ответа.	10
Задача сведена заменой переменной к исследованию квадратного трёхчлена с параметром, но дальнейших продвижений нет или они неверны.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

5. (20 баллов) Дан треугольник KLM. Проведена окружность, проходящая через точку M, касающаяся отрезка LK в точке A, являющейся его серединой и пересекающая стороны ML и MK в точках C и B, соответственно, так, что $CB = 4,$ точка C равноудалена от точек A и L, а $\cos\angle K = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$. Найти длину отрезка BK.

Решение.



$\angle CLA = \angle CAL = \angle CMA = \alpha$, $LA = MA = AK \Rightarrow \Delta LMK$ прямоугольный с $\angle LMK = 90^0$.

Тогда $\angle AMK = 90^0 - \alpha = \angle BAK = \angle BKA = \beta \Rightarrow$

$$CB = 2R = \frac{AB}{\sin\beta} = \frac{BK}{\sin\angle K} \Rightarrow KB = CB \cdot \sin\angle K = 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} = \sqrt{6}.$$

Ответ: $\sqrt{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Задача решена верно.	20
Доказано, что CB – диаметр.	15
Доказано, что ΔLMK – прямоугольный.	10
Доказано, что или ΔLAM – равнобедренный, или ΔMAK – равнобедренный, или ΔABK – равнобедренный.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

6. (20 баллов) Вычислить значение выражения:

$$1\cdot 2\cdot (1+2) - 2\cdot 3\cdot (2+3) + 3\cdot 4\cdot (3+4) - \dots + 2019\cdot 2020\cdot (2019+2020).$$

Решение. Докажем методом математической индукции для натуральных n, что:

$$-0\cdot 1\cdot (0+1) + 1\cdot 2\cdot (1+2) - 2\cdot 3\cdot (2+3) + 3\cdot 4\cdot (3+4) - \dots -$$
$$-(2n-2)\cdot(2n-1)\cdot(4n-3) + (2n-1)\cdot 2n\cdot(4n-1) =$$
$$= (2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1).$$

База: n=1 => $-0\cdot 1\cdot(0+1) + 1\cdot 2\cdot(1+2) = 1\cdot 2\cdot 3$ – верно.

Пусть при n=k – верно, тогда при n=k+1 =>

$$-0\cdot 1\cdot (0+1) + 1\cdot 2\cdot (1+2) - 2\cdot 3\cdot (2+3) + 3\cdot 4\cdot (3+4) - \dots$$
$$\dots + (2k-1)\cdot 2k\cdot(4k-1) -$$
$$-2k\cdot(2k+1)\cdot(4k+1) + (2k+1)\cdot(2k+2)\cdot(4k+3) =$$
$$= (2k-1)\cdot 2k\cdot(2k+1) + (2k+1)\cdot\big((2k+2)\cdot(4k+3) - 2k\cdot(4k+1)\big)$$
$$= (2k+1)\cdot(4k^2-2k+8k^2+14k+6-8k^2-2k) = (2k+1)\cdot(4k^2+10k+6)$$
$$=$$
$$= (2k+1)\cdot(2k+2)\cdot(2k+3),$$ утверждение доказано.

Следовательно,

$1\cdot 2\cdot(1+2) - 2\cdot 3\cdot(2+3) + 3\cdot 4\cdot(3+4) - \dots + 2019\cdot 2020\cdot(2019+2020) = 2019\cdot 2020\cdot 2021 = 2020^3 - 2020 = 8000\cdot 101^3 - 2020 = 8000\cdot 1030301 - 2020 = 8242408000 - 2020 = 8242405980.$

Ответ: 8242405980.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	20
При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.	14
Приведено начало возможного решения, получены некоторые промежуточные результаты (но не доказана формула для $(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)$), дальнейшее решение неверно или отсутствует.	6
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20