Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», весна 2020 г.

8 класс

Вариант № 1

1. *(10 баллов*. Два научно-производственных предприятия поставляют на рынок субстраты для выращивания орхидей. В субстрате «Орхидея-1» сосновой коры в 3 раза больше, чем песка; торфа в 2 раза больше, чем песка. В субстрате «Орхидея-2» коры в 2 раза меньше, чем торфа; песка в полтора раза больше, чем торфа. В каком отношении надо взять субстраты, чтобы в новый, смешанный состав кора, торф и песок вошли поровну.

2. *(15 баллов)* Составьте приведённое квадратное уравнение, у которого корни вдвое больше корней уравнения $2x^2-5x-8=0$.

3. *(15 баллов)* На стороне AB параллелограмма $ABCD$ взята точка P, а на стороне BC – точка Q так, что $3AB = 7BP$, $3BC = 4BQ$. Найдите отношение $DO:OP$, где точка O – точка пересечения отрезков AQ и DP.

4. *(20 баллов)* При каких неотрицательных значениях параметра а уравнение
$\left|\frac{x^3-10x^2+31x-30}{x^2-8x+15}\right| = \left(\sqrt{2x-a}\right)^2 + 2 - 2x$ имеет одно решение?

5. *(20 баллов)* В равнобедренной трапеции ABCD основания BC и AD равны 8 см и 20 см соответственно, а угол BAD равен 60º. Найдите площадь четырехугольника, соединяющего середины сторон трапеции.

6. *(20 баллов)* Решите уравнение: $\sqrt{4+2x}+\sqrt{6+3x}+\sqrt{8+4x}=9+\frac{3x}{2}$

Решения варианта № 1

1. (10 баллов). Два научно-производственных предприятия поставляют на рынок субстраты для выращивания орхидей. В субстрате «Орхидея-1» сосновой коры в 3 раза больше, чем песка; торфа в 2 раза больше, чем песка. В субстрате «Орхидея-2» коры в 2 раза меньше, чем торфа; песка в полтора раза больше, чем торфа. В каком отношении надо взять субстраты, чтобы в новый, смешанный состав кора, торф и песок вошли поровну.

Решение. В первый субстрат кора-торф-песок входят в отношении 3:2:1, во второй в отношении 1:2:3. Возьмем а частей первой смеси и в частей второй. Тогда 3а+в=2а+2в =а+3в. Получаем а=в.

Ответ: 1:1.

Баллы	Критерии выставления
10 баллов	Обоснованное решение
5 баллов	При обоснованном решении допущена арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
0 баллов	Все остальные случаи

2. (15 баллов). Составьте приведённое квадратное уравнение, у которого корни вдвое больше корней уравнения $2x^2-5x-8=0$.

Решение: По теореме Виета $x_1+x_2=\dfrac{5}{2}$, $x_1\cdot x_2=-4$. Пусть t_1 и t_2 - корни искомого квадратного уравнения, тогда $t_1+t_2=2x_1+2x_2=5$, $t_1\cdot t_2=2x_1\cdot 2x_2=-16$ и по теореме обратной теореме Виета получаем уравнение: $x^2-5x-16=0$. Уравнение является приведенным.

Ответ: $x^2-5x-16=0$.

Критерии:

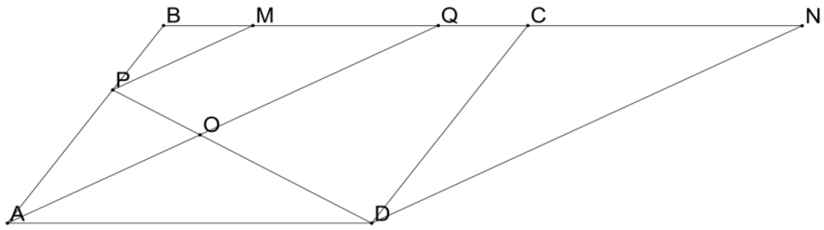
Баллы	Критерии выставления
10	Обоснованно получен правильный ответ
5	Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

3. (15 баллов). На стороне *AB* параллелограмма *ABCD* взята точка *P*, а на стороне *BC* – точка *Q* так, что 3*AB* = 7*BP*, 3*BC* = 4*BQ*. Найдите отношение *DO*:*OP*, где точка *O* – точка пересечения отрезков *AQ* и *DP*.

Решение

Из равенства 3*AB* = 7*BP* следует, что *AB* = 7*x*, *BP* = 3x, где x – коэффициент пропорциональности. Аналогично из 3*BC* = 4*BQ*, следует *BC*=4*y*, *BQ*=3y. Проведем через точки *P* и *D* прямые параллельно *AQ* и пусть точки *M* и *N* – точки пересечения этих прямых с прямой *BC*. Так как *AQND* –

параллелограмм, $QN=AD=4y$. Применим дважды теорему Фалеса: $\frac{MQ}{BQ}=\frac{PA}{BA}=\frac{4}{7}$, и значит, $\frac{DO}{OP}=\frac{NQ}{QM}=\frac{7}{3}$.



Ответ: $\frac{7}{3}$**.**

Критерии:

Баллы	Условия выставления
15 баллов	Полное, обоснованное решение
12 баллов	Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Проведены вспомогательные прямые и найдено отношение длин полученных отрезков, но дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.
5 баллов	Проведена одна из вспомогательных прямых и найдено отношение длин полученных отрезков, но дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.
0 баллов	Решение не соответствует перечисленным выше критериям

4. (20 баллов). При каких неотрицательных значениях параметра a уравнение $\left|\frac{x^3-10x^2+31x-30}{x^2-8x+15}\right|=\left(\sqrt{2x-a}\right)^2+2-2x$ имеет одно решение?

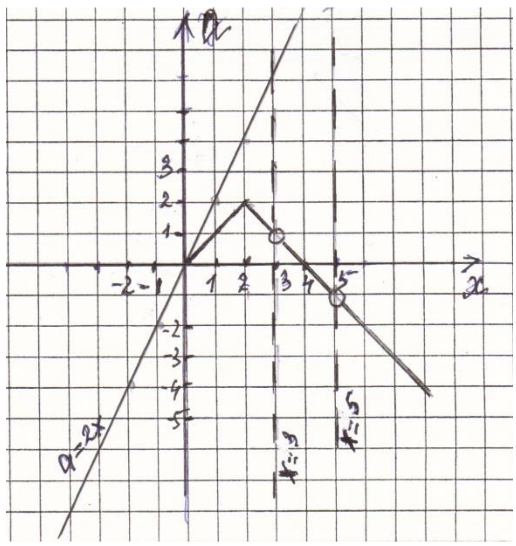
Решение.

Преобразуем $\left|\frac{x^3-10x^2+31x-30}{x^2-8x+15}\right|=\left(\sqrt{2x-a}\right)^2+2-2x$

$$\left|\frac{x(x^2-10x+25)+6(x-5)}{(x-5)(x-3)}\right|=2x-a+2-2x$$

$$\left|\frac{(x-5)(x-3)(x-2)}{(x-5)(x-3)}\right|=2-a$$

Решим графически уравнение $|x-2|=2-a$, $x\neq 5, x\neq 3$, $a\leq 2x$ в системе xOa.



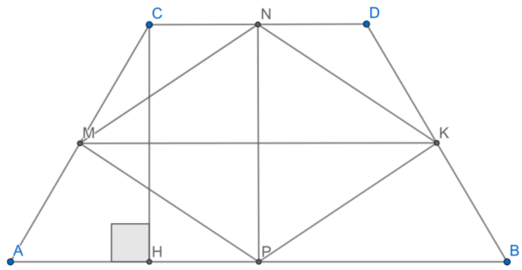
Ответ: при $a=1$, $a=2$.

Критерии:

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Верное обоснованное решение
15 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при его аналитическом решение решении допущена вычислительная ошибка, не связанная с областью определения функции.
10 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение, но оно не решено или решено неверно.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

5. (20 баллов). В равнобедренной трапеции ABCD основания BC и AD равны 8 см и 20 см соответственно, а угол BAD равен 60⁰. Найдите площадь четырехугольника, соединяющего середины сторон трапеции.

Решение.



1. Рассмотрим четырехугольник MNKP. MN- средняя линия треугольника ABC, KP – средняя линия треугольника ADC, следовательно, $MN \parallel AC \parallel KP$ и $MN = \frac{1}{2}AC = KP$. Так как $MN \parallel KP$ и $MN = KP$, то MNKP параллелограмм по признаку.

2. Аналогично доказывается, что $NK = PM = \frac{1}{2}BD$.

3. Трапеция ABCD равнобедренная. По свойству равнобедренной трапеции AC=BD. Тогда $MN = KP = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = NK = PM$. Значит, MNKP - ромб по определению.

4. Проведем MK и ND - диагонали ромба. $S_{MNKP} = \frac{1}{2}NP \cdot MK$.

5. MK – средняя линия трапеции ABCD. Так как N – середина BC, P – середина AD и ABCD - равнобедренная трапеция, то NP - высота трапеции.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}NP \cdot (BC + AD) = NP \cdot MK = 2S_{MNKP}$.

6. Проведем $BH \perp AD$. Треугольник ABH прямоугольный. По свойству равнобедренной трапеции $AH = \frac{AD-BC}{2} = 6$. $BH = AH \cdot tg60° = 6\sqrt{3}$.

7. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot (8 + 20) = 84\sqrt{3}$, тогда $S_{MNKP} = 42\sqrt{3}$.

Ответ: $42\sqrt{3}$.

Критерии:

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Полное обоснованное решение.
15 баллов	Решение в целом верное, но недостаточно обоснованное (например, есть недочеты в доказательстве факта, что MNKP – ромб) ИЛИ при верном ходе решения допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Доказано, что MNKP – ромб. Дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

6. (20 баллов). Решите уравнение: $\sqrt{4+2x}+\sqrt{6+3x}+\sqrt{8+4x}=9+\frac{3x}{2}$

Решение: Заметим, что 4+2x=2(2+x); 6+3x=3(2+x); 8+4x=4(2+x), по неравенству о средних левая часть не превосходит (2+2+x+3+2+x+4+2+x)/2=15/2 + 3x/2

Ответ: нет решений.

Критерии:

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Любое полное и верное решение
15 баллов	Использовано неравенство о средних, но допущена арифметическая ошибка
5 баллов	Указан только ответ
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.