Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», весна 2020 г.

11 класс

Вариант № 8

1. Вычислите коэффициент при x^{80} в многочлене $(1+x+x^2+\cdots+x^{80})^3$ после приведения подобных членов. (12 баллов)

2. Найдите площадь фигуры, координаты $(x;y)$ точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |x+1|-|y+3|\geq 0, \\ \log_4(x^2+y^2+6y+2x-26)\leq 3. \end{cases}$$

(12 баллов)

3. Какая наименьшая площадь может быть у круга с центром в начале координат, который имеет общие точки с графиком функции $y=\dfrac{6}{x}-\dfrac{4x}{3}$? (16 баллов)

4. Из точки C проведена касательная к окружности радиуса $2\sqrt{5}$ с центром в точке O, точка A является точкой касания. Отрезок CO пересекает окружность в точке B. Из точки B восстановлен перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $BF=2$. (20 баллов)

5. Найдите все значения x, при которых неравенство

$(a+2)x-(1+2a)\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+a^2+4a-5>0$ выполняется хотя бы для одного $a\in[-2;1]$.

(20 баллов)

6. Основанием пирамиды $SABC$ служит равнобедренный треугольник ABC, причем $AB = BC = 3$, $AC = 5$. Высотой пирамиды $SABC$ является отрезок SO, где O – точка пересечения прямой, проходящей через вершину B параллельно стороне AC, и прямой, проходящей через C перпендикулярно стороне AC. Найдите расстояние от центра вписанной в треугольник ABC окружности до плоскости, содержащей боковую грань BSC, если высота пирамиды равна $7/12$.

(20 баллов)

Решение варианта № 8

1. Вычислите коэффициент при x^{80} в многочлене $(1+x+x^2+\cdots+x^{80})^3$ после приведения подобных членов. (12 баллов)

Решение: $(1+x+x^2+\cdots+x^{80})^3=(1+x+x^2+\cdots+x^{80})(1+x+x^2+\cdots+x^{80})(1+x+x^2+\cdots+x^{80})$
Пусть после раскрытия скобок слагаемое $x^p\cdot x^q\cdot x^r$ получается, если множитель x^p выбирается их первой скобки, x^q - из второй скобки, x^r - из третьей скобки. Тогда $x^p\cdot x^q\cdot x^r=x^{80}$, $p+q+r=80$, $0\le p,q,r\le 80,\quad p,q,r\in N$. Нужно вычислить количество таких слагаемых при раскрытии скобок. Пусть $p=0$, количество различных сумм $q+r=80$ равно 81. Пусть $p=1$, количество различных сумм $q+r=79$ равно 80. И так далее. Пусть $p=80$, количество различных сумм $q+r=0$ равно 1. Вычислим общее количество таких слагаемых: $1+2+3+\cdots+81=\dfrac{82\cdot 81}{2}=3321$.

Ответ: 3321.

2. Найдите площадь фигуры, координаты $(x;\,y)$ точек которой удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} |x+1|-|y+3|\ge 0,\\ \log_4(x^2+y^2+6y+2x-26)\le 3.\end{cases}$$
(12 баллов)

Решение. $\begin{cases} |x+1|-|y+3|\ge 0;\\ \log_4((x+1)^2+(y+3)^2-36)\le 3.\end{cases}$
Замена: u=x+1, v=y+3/
Имеем: $\begin{cases} |u|-|v|\ge 0;\\ 36\ge v^2+u^2\le 100.\end{cases}$
Площадь фигуры равна $S=\frac{\pi(100-36)}{2}=32\pi$.
Ответ: 32π.

3. Какая наименьшая площадь может быть у круга с центром в начале координат, который имеет общие точки с графиком функции $y=\dfrac{6}{x}-\dfrac{4x}{3}$? (16 баллов)

Решение. $(x;\,f(x))$ принадлежит окружности с радиусом r

$$r^2=f^2(x)+x^2=\left(\frac{6}{x}-\frac{4x}{3}\right)^2+x^2=\frac{36}{x^2}+\frac{25x^2}{9}-16\ \ (r^2)'=-\frac{72}{x^3}+\frac{50x}{9}=\frac{2(25x^4-36\cdot 9)}{16x^3},$$
$x_{\min}=\sqrt{18/5},\quad S_{\min}=\pi r_{\min}^2=4\pi.$

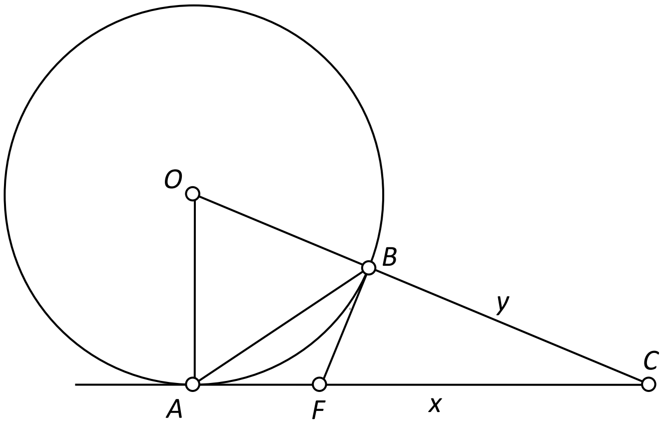
Ответ: 4π.

4. Из точки C проведена касательная к окружности радиуса $2\sqrt{5}$ с центром в точке O, точка A является точкой касания. Отрезок CO пересекает окружность в точке B. Из точки B восстановлен перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $BF=2$. (20 баллов)

Решение:

Так как BF и AF отрезки касательных, $BF = AF = 2$.

Прямоугольные треугольники AOC и BFC подобны, $\dfrac{OC}{FC} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{OA}{BF}$.



Пусть $x = CF, \quad y = BC$.

Тогда $\dfrac{y+2\sqrt{5}}{x} = \dfrac{2+x}{y} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2\sqrt{5} = x\sqrt{5}, \\ 2+x = y\sqrt{5}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5}y+10 = 5x, \\ 2+x = \sqrt{5}y, \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = \sqrt{5}. \end{cases}$

В треугольнике ABC имеем $AC = 5, \quad BC = \sqrt{5}$, $\sin\angle OCA = \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2}{3}$, $\cos\angle OCA = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Отсюда по теореме косинусов получаем

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cos\angle OCA = 25+5-10\cdot 5\cdot\frac{1}{3} = \frac{40}{3}, \quad AB = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}}.$$

Тогда $R_{\text{оп}} = \dfrac{AB}{2\sin\angle OCA} = \dfrac{2\sqrt{10}\cdot 3}{2\sqrt{3}\cdot 2} = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

Ответ: $\sqrt{30}/2$.

5. Найдите все значения *x*, при которых неравенство $(a+2)x-(1+2a)\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+a^2+4a-5>0$ выполняется хотя бы для одного $a \in [-2;1]$.

Решение:

$a^2+(x-2\sqrt[3]{x^2}+4)a+2x-\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}-5>0$

Найдем *x*, при которых для всех $a \in [-2;1]$ выполняется неравенство

$a^2+(x-2\sqrt[3]{x^2}+4)a+2x-\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}-5 \le 0.$

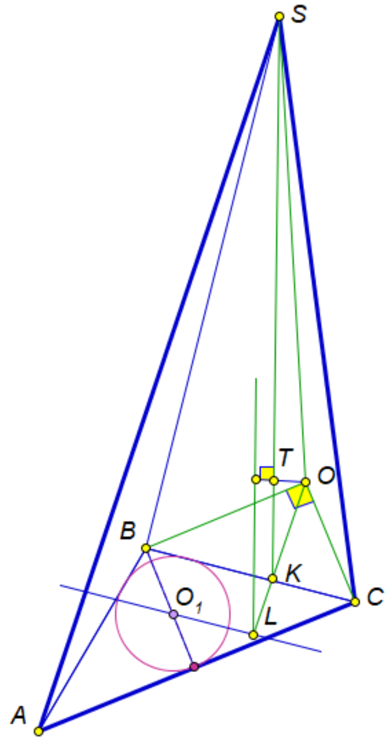
Обозначим $f(a) = a^2+(x-2\sqrt[3]{x^2}+4)a+2x-\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}-5$. Тогда $\begin{cases} f(-2)\le 0, \\ f(1)\le 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}-9\le 0, \\ 3x-3\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}\le 0, \end{cases}$

$t = \sqrt[3]{x}, \quad \begin{cases} t^2-2t-3\le 0, \\ t(t^2 \le -t-2)\le 0, \end{cases} \quad t\in\{-1\}\cup[0;\,2], \quad x\in\{-1\}\cup[0;\,8].$

При $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;\,0)\cup(8;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(-1;\,0)\cup(8;+\infty)$

6. Основанием пирамиды *SABC* служит равнобедренный треугольник *ABC*, причем *AB* = *BC* = 3, *AC* = 5. Высотой пирамиды *SABC* является отрезок *SO*, где *O* – точка пересечения прямой, проходящей через вершину *B* параллельно стороне *AC*, и прямой, проходящей через *C* перпендикулярно стороне *AC*. Найдите расстояние от центра вписанной в треугольник *ABC* окружности до плоскости, содержащей боковую грань *BSC*, если высота пирамиды равна $7/12$. (20 баллов)



Решение:

$AB = BC = b = 3,\ \ AC = a = 5,\ d = \rho(O_1, BSC)$

$OB = a/2,\quad OC = \sqrt{b^2 - a^2/4},\ OK = \dfrac{OB \cdot OC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4b}$

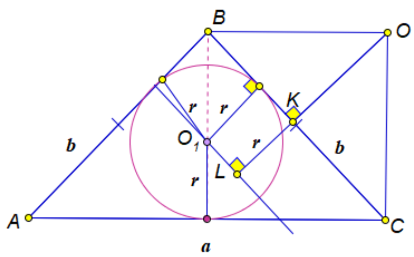
$r = \dfrac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \dfrac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a+2b)}$, $LK = r,$ в треугольнике OSK имеем

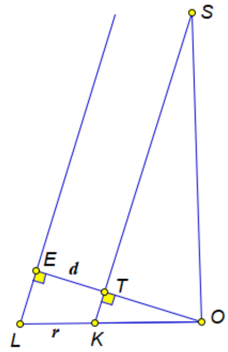
$\dfrac{OT}{d} = \dfrac{OK}{LK},\quad d = \dfrac{OT \cdot 2b}{a+2b},$

$SO = h,\quad h \cdot OK = OT\sqrt{h^2 + OK^2},$

$OT = \dfrac{h \cdot OK}{\sqrt{h^2 + OK^2}} = \dfrac{ha\sqrt{4b^2 - a^2}}{\sqrt{16h^2b^2 + a^2(4b^2 - a^2)}},$

$d = \dfrac{2hab\sqrt{4b^2 - a^2}}{(a+2b)\sqrt{16h^2b^2 + a^2(4b^2 - a^2)}} = \dfrac{35\sqrt{11}}{396}.$





Ответ: $\dfrac{35\sqrt{11}}{396}$.