

Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика» общеобразовательный предмет «Математика», весна 2020 г.

11 класс

Вариант № 2

1. В турнире по баскетболу участвовало n команд из города A и $2n$ из города B . Каждая команда сыграла ровно одну игру с каждой другой командой. Отношение числа побед, одержанных командами из города B , к числу побед, одержанных командами из города A , равно $14 : 19$. Найдите n , если известно, что ничьих в турнире не было. (12 баллов)
2. Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости Oxy , расположенная между прямыми $x = -26$ и $x = 2$, ограниченная снизу осью x , а сверху – касательной к графику функции $y = 5 + \sqrt{4 - x}$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-26 \leq x_0 \leq 2$? (12 баллов)
3. Найдите все натуральные числа $n \geq 2$, для которых верно равенство $4x_n + 2y_n = 20n^2 + 13n - 33$, где $x_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n$, $y_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2$. (16 баллов)
4. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна 40. На сторонах AB , BC , CD , AD выбраны точки K , L , M , N соответственно, причем $AK : AB = BL : BC = CM : CD = DN : AD$. Найдите отношение $AK : KB$, если площадь четырехугольника $KLMN$ равна 25. (20 баллов)
5. Найдите множество значений выражения $\frac{a \cos x - b \sin x + 2c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ где x , a , b , c – произвольные числа, такие, что $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. (20 баллов)
6. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной a точка K является серединой ребра $B_1 C_1$, точка L лежит на ребре $C_1 D_1$, причем $D_1 L = 3 C_1 L$, точка N является серединой ребра AA_1 . Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки K , L , N . Опишите алгоритм построения сечения. Найдите площадь полученного сечения. (20 баллов)

Решение варианта № 2

1 В турнире по баскетболу участвовало n команд из города A и $2n$ из города B . Каждая команда сыграла ровно одну игру с каждой другой командой. Отношение числа побед, одержанных командами из города B , к числу побед, одержанных командами из города A , равно $14 : 19$. Найдите n , если известно, что ничьих в турнире не было. (12 баллов)

Решение. Количество игр, в которых участвовали только команды из города A равно $\frac{(n-1)n}{2}$. В

этих играх команды из города A одержали $\frac{(n-1)n}{2}$ победу. Количество игр, в которых участвовали

только команды из города B равно $\frac{(2n-1)2n}{2}$. В этих играх команды из города B одержали $(2n-1)n$

победу. Число встреч команд города A с командами города B равно $2n^2$. Пусть m – число побед в этих встречах, одержанных командами из города A , тогда команды из города B одержали в этих

встречах $2n^2 - m$ побед. Всего команды из города A одержали $\frac{(n-1)n}{2} + m$ побед, а из города B

одержали $(2n-1)n + 2n^2 - m$ побед. По условию имеем $\frac{\frac{(n-1)n}{2} + m}{(2n-1)n + 2n^2 - m} = \frac{19}{14}$,

$$7n^2 - 7n + 14m = 76n^2 - 19n - 19m, \quad 33m = 69n^2 - 12n, \quad m = \frac{23n^2 - 4n}{11}, \quad \frac{23n^2 - 4n}{11} \leq 2n^2, \quad n^2 - 4n \leq 0.$$

Число n может быть равно 1, 2, 3, 4. Подстановкой в равенство $m = \frac{23n^2 - 4n}{11}$ получаем, что m

является целым числом только при $n = 4$.

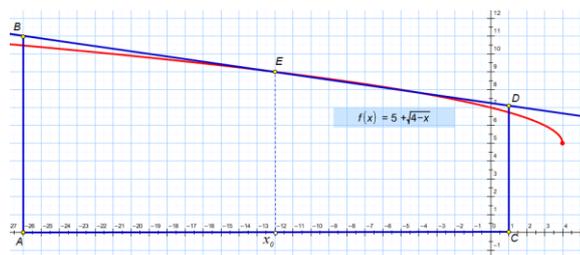
Ответ: 4.

2. Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости Oxy , расположенная между прямыми $x = -26$ и $x = 2$, ограниченная снизу осью x , а сверху – касательной к графику функции $y = 5 + \sqrt{4-x}$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-26 \leq x_0 \leq 2$? (12 баллов)

Решение. Решение. Составим уравнение касательной к графику функции $y = 5 + \sqrt{4-x}$ в точке с абсциссой x_0

:

$$y_{кас} = -\frac{1}{2\sqrt{4-x_0}}(x-x_0) + 5 + \sqrt{4-x_0}.$$



Фигурой является трапеция с основаниями, равными $y_{кас}(-26)$ и $y_{кас}(2)$. Высота трапеции равна 28.

Имеем

$$y_{кас}(-26) = \frac{1}{2\sqrt{4-x_0}}(26+x_0) + 5 + \sqrt{4-x_0}, \quad y_{кас}(2) = \frac{1}{2\sqrt{4-x_0}}(x_0-2) + 5 + \sqrt{4-x_0},$$

$$S = 14(y_{\text{кас}}(-26) + y_{\text{кас}}(2)) = 14 \left(\frac{x_0 + 12}{\sqrt{4 - x_0}} + 10 + 2\sqrt{4 - x_0} \right) = 14 \left(\frac{20 - x_0}{\sqrt{4 - x_0}} + 10 \right). \text{ Находим производную}$$

$$S' = 14 \left(\frac{20 - x_0}{\sqrt{4 - x_0}} \right)' = \frac{-7(x_0 + 12)}{\sqrt{(4 - x_0)^3}}. \text{ Наименьшее значение функция } S(x_0) \text{ принимает при } x_0 = -12,$$

$$S_{\min} = S(-12) = 504.$$

Ответ: 504.

3. Найдите все натуральные числа $n \geq 2$, для которых верно равенство $4x_n + 2y_n = 20n^2 + 13n - 33$, где $x_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n$, $y_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2$. (20 баллов)

Решение: Пусть $z_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$. Имеем

$$\begin{aligned} x_n &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n = (2 + 3 + \dots + n) + (3 + 4 + \dots + n) + \dots + ((n-1) + n) + n = \\ &= (z_n - z_1) + (z_n - z_2) + \dots + (z_n - z_{n-1}) = (n-1)z_n - (z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1}) = \\ &= \frac{1}{2} \left((n-1)n(n+1) - (1^2 + 1 + 2^2 + 2 + \dots + (n-1)^2 + (n-1)) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left((n-1)n(n+1) - (y_n + z_{n-1}) \right). \end{aligned}$$

Подставим полученное выражение в равенство $4x_n + 2y_n = 20n^2 + 13n - 33$. Получаем

$$2 \left((n-1)n(n+1) - (y_n + z_{n-1}) \right) + 2y_n = 20n^2 + 13n - 33, \quad 2(n-1)n(n+1) - n(n-1) = 20n^2 + 13n - 33,$$

$$(n-1)(2n(n+1) - n) = (n-1)(20n + 33), \quad 2n^2 - 19n - 33 = 0, \quad n = 11.$$

Ответ: $n = 11$.

4. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна 40. На сторонах AB , BC , CD , AD выбраны точки K , L , M , N соответственно, причем $AK : AB = BL : BC = CM : CD = DN : AD$. Найдите отношение $AK : KB$, если площадь четырехугольника $KLMN$ равна 25. (20 баллов)

Решение: $AK : AB = x$, $DN : AD = x$,

$$AN : AD = (AD - ND) : AD = 1 - x,$$

$S_{AKN} = x(1-x)S_{ABD}$. Аналогично получаем $S_{CLM} = x(1-x)S_{BCD}$. Тогда

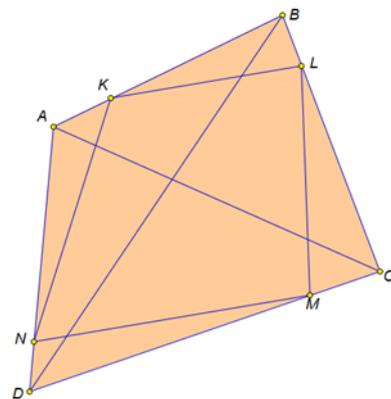
$$S_{AKN} + S_{CLM} = x(1-x)S_{ABCD} = 100x(1-x).$$

Аналогично $S_{BLK} + S_{DNM} = x(1-x)S_{ABCD} = 40x(1-x)$. Отсюда

$$S_{KLMN} = 40 - 80x(1-x). \text{ Имеем уравнение } 25 = 40 - 80x(1-x),$$

$$16x^2 - 16x + 3 = 0, \quad x = 1/4 \text{ или } x = 3/4.$$

Ответ: $1/4$ или $3/4$.



5. Найдите множество значений выражения $\frac{a \cos x - b \sin x + 2c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ где x, a, b, c – произвольные числа,

такие, что $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

(20 баллов)

Решение: Пусть $\vec{n} = (a; b; c)$, $\vec{m} = (\cos x; -\sin x; 2)$. Тогда $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $|\vec{m}| = \sqrt{5}$. Рассмотрим

функцию $f(x, a, b, c) = \frac{a \cos x - b \sin x + 2c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}|} = |\vec{m}| \cos \alpha = \sqrt{5} \cos \alpha$, где α – угол между

векторами \vec{n} и \vec{m} . Множеством значений функции f является отрезок $E = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

Ответ: $E = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

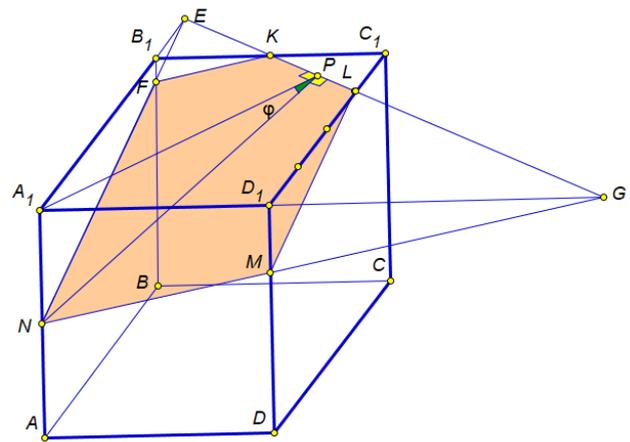
6. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной a точка K является серединой ребра $B_1 C_1$, точка L лежит на ребре $C_1 D_1$, причем $D_1 L = 3 C_1 L$, точка N является серединой ребра $A A_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, L, N . Опишите алгоритм построения сечения. Найдите площадь полученного сечения. (20 баллов)

Решение:

Алгоритм:

- 1) Соединяем K и L . E – точка пересечения прямых KL и $A_1 B_1$.
- 2) Соединяем E и N . F – точка пересечения прямых EN и BB_1 .
- 3) G – точка пересечения прямых KL и $A_1 D_1$.
- 4) M – точка пересечения прямых GN и DD_1 .
- 5) $FKLMN$ – искомое сечение.

φ – угол наклона плоскости сечения к плоскости $A_1 B_1 C_1 D_1$.



$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{np}}{\cos \varphi} = \frac{S_{A_1 B_1 K L D_1}}{\cos \varphi} = \frac{a^2 - a^2/16}{\cos \varphi} = \frac{15a^2}{16 \cos \varphi}.$$

$$A_1 P \cdot KL = 2S_{A_1 KL} = 2(a^2 - a^2/4 - 3a^2/8 - a^2/16) = 5a^2/8.$$

$$A_1 P = 5a^2 / (8 KL) = a\sqrt{5}/2, \quad \cos \varphi = A_1 P / NP = \frac{5a}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2/4 + 5a^2/4}} = \frac{5}{\sqrt{30}}.$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{3a^2 \sqrt{30}}{16}.$$

Ответ: $\frac{3a^2 \sqrt{30}}{16}$.