**Второй (очный) этап академического соревнования**

**Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», весна 2020 г.**

**11 класс**

**Вариант № 1**

**1.** В турнире по волейболу участвовало $n$ команд из города $A$ и $2n$ из города $B$. Каждая команда сыграла ровно одну игру с каждой другой командой. Отношение числа побед, одержанных командами из города $B$, к числу побед, одержанных командами из города $A$, равно 3 : 4. Найдите $n$, если известно, что ничьих в турнире не было. (12 баллов)

**2.** Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости $Oxy$, расположенная между прямыми $x=-11$ и $x=1$, ограниченная снизу осью $x$, а сверху – касательной к графику функции $y=3+\sqrt{4-x}$ с абсциссой $x_0$ точки касания, лежащей в промежутке $-11\le x_0\le 1$? (12 баллов)

**3.** Найдите все натуральные числа $n\ge 2$, для которых верно равенство $4x_n+2y_n=17n^2+n-18$, где $x_n=1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(n-1)\cdot n$, $y_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2$. (16 баллов)

**4.** Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна 100. На сторонах $AB$, $BC$, $CD$, $AD$ выбраны точки $K, L, M, N$ соответственно, причем $AK:AB=BL:BC=CM:CD=DN:AD.$ Найдите отношение $AK:KB,$ если площадь четырехугольника $KLMN$ равна 68. (20 баллов)

**5.** Найдите множество значений выражения $\dfrac{a\cos x+b\sin x+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, где $x$, $a$, $b$, $c$ – произвольные числа, такие, что $a^2+b^2+c^2\ne 0$. (20 баллов)

**6.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной $a$ точка $K$ является серединой ребра $B_1C_1$, точка $L$ лежит на ребре $C_1D_1$, причем $D_1L=2C_1L$, точка $N$ является серединой ребра $AA_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки $K$, $L$, $N$. Опишите алгоритм построения сечения. Найдите площадь полученного сечения. (20 баллов)

## Решение варианта № 1

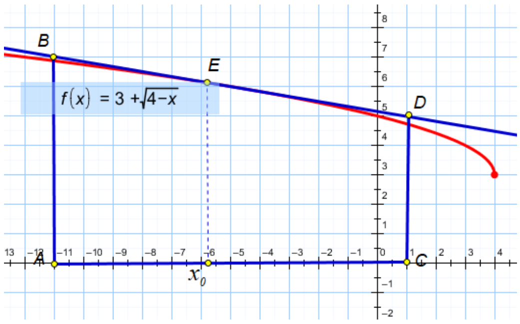
**1.** В турнире по волейболу участвовало $n$ команд из города $A$ и $2n$ из города $B$. Каждая команда сыграла ровно одну игру с каждой другой командой. Отношение числа побед, одержанных командами из города $B$, к числу побед, одержанных командами из города $A$, равно 3 : 4. Найдите $n$, если известно, что ничьих в турнире не было. (12 баллов)

**Решение.** Количество игр, в которых участвовали только команды из города $A$ равно $\frac{(n-1)n}{2}$. В этих играх команды из города $A$ одержали $\frac{(n-1)n}{2}$ победу. Количество игр, в которых участвовали только команды из города $B$ равно $\frac{(2n-1)2n}{2}$. В этих играх команды из города $B$ одержали $(2n-1)n$ победу. Число встреч команд города А с командами города $B$ равно $2n^2$. Пусть $m$ – число побед в этих встречах, одержанных командами из города $A$, тогда команды из города $B$ одержали в этих встречах $2n^2-m$ побед. Всего команды из города $A$ одержали $\frac{(n-1)n}{2}+m$ побед, а из города $B$ одержали $(2n-1)n+2n^2-m$ побед. По условию имеем $\frac{\frac{(n-1)n}{2}+m}{(2n-1)n+2n^2-m}=\frac{4}{3}$,

$3n^2-3n+6m=32n^2-8n-8m,\ 14m=29n^2-5n,\ m=\frac{29n^2-5n}{14},\ \frac{29n^2-5n}{14}\leq 2n^2,\ n^2-5n\leq 0.$ Число $n$ может быть равно 1, 2, 3, 4, 5. Подстановкой в равенство $m=\frac{29n^2-5n}{14}$, получаем, что $m$ является целым числом только при $n$ = 5.

**Ответ:** 5.

**2.** Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости $Oxy$, расположенная между прямыми $x=-11$ и $x=1$, ограниченная снизу осью $x$, а сверху – касательной к графику функции $y=3+\sqrt{4-x}$ с абсциссой $x_0$ точки касания, лежащей в промежутке $-11\leq x_0\leq 1$? (12 баллов)




**Решение.** Составим уравнение касательной к графику функции $y=3+\sqrt{4-x}$ в точке с абсциссой $x_0$:

$$y_{кас}=-\frac{1}{2\sqrt{4-x_0}}(x-x_0)+3+\sqrt{4-x_0}.$$

Фигурой является трапеция с основаниями, равными $y_{кас}(-11)$ и $y_{кас}(1)$. Высота трапеции равна 12. Имеем

$$y_{кас}(-11)=\frac{1}{2\sqrt{4-x_0}}(11+x_0)+3+\sqrt{4-x_0},\quad y_{кас}(1)=\frac{1}{2\sqrt{4-x_0}}(x_0-1)+3+\sqrt{4-x_0},$$

$S=6(y_{кас}(-11)+y_{кас}(1))=6\left(\dfrac{x_0+5}{\sqrt{4-x_0}}+6+2\sqrt{4-x_0}\right)=6\left(\dfrac{13-x_0}{\sqrt{4-x_0}}+6\right).$ Находим производную $S'=6\left(\dfrac{13-x_0}{\sqrt{4-x_0}}\right)'=\dfrac{-3(x_0+5)}{\sqrt{(4-x_0)^3}}.$ Наименьшее значение функция $S(x_0)$ принимает при $x_0=-5$, $S_{\min}=S(-5)=72.$

**Ответ:** 72.

**3.** Найдите все натуральные числа $n\geq 2$, для которых верно равенство $4x_n+2y_n=17n^2+n-18$, где $x_n=1\cdot 2+2\cdot 3+\dots+(n-1)\cdot n,\ y_n=1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2.$ (20 баллов)

**Решение:** Пусть $z_n=1+2+\dots+n=\dfrac{(n+1)n}{2}=\dfrac{n^2+n}{2}$. Имеем

$$\begin{aligned}x_n&=1\cdot 2+2\cdot 3+\dots+(n-1)\cdot n=(2+3+\dots n)+(3+4+\dots n)+\dots((n-1)+n)+n=\\&=(z_n-z_1)+(z_n-z_2)+\dots+(z_n-z_{n-1})=(n-1)z_n-(z_1+z_2+\dots+z_{n-1})=\\&=\frac{1}{2}\left((n-1)n(n+1)-(1^2+1+2^2+2+\dots+(n-1)^2+(n-1)\right)=\\&=\frac{1}{2}\left((n-1)n(n+1)-(y_n+z_{n-1})\right).\end{aligned}$$

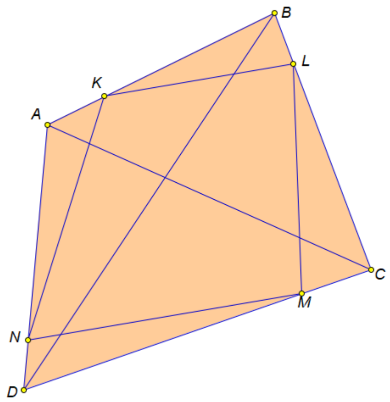
Подставим полученное выражение в равенство $4x_n+2y_n=17n^2+n-18$. Получаем

$2\left((n-1)n(n+1)-(y_n+z_{n-1})\right)+2y_n=17n^2+n-18,\ 2(n-1)n(n+1)-n(n-1)=17n^2+n-18,$

$(n-1)(2n(n+1)-n)=(n-1)(17n+18),\ \ 2n^2-16n-18=0,\ n^2-8n-9=0,\ n=9.$

**Ответ:** $n=9.$

**4.** Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна 100. На сторонах $AB$, $BC$, $CD$, $AD$ выбраны точки $K,L,M,N$ соответственно, причем $AK:AB=BL:BC=CM:CD=DN:AD.$ Найдите отношение $AK:KB$, если площадь четырехугольника $KLMN$ равна 68. (20 баллов)




**Решение:** $AK:AB=x,\ DN:AD=x,$

$AN:AD=(AD-ND):AD=1-x,$

$S_{AKN}=x(1-x)S_{ABD}$. Аналогично получаем $S_{CLM}=x(1-x)S_{BCD}$. Тогда $S_{AKN}+S_{CLM}=x(1-x)S_{ABCD}=100x(1-x).$

Аналогично $S_{BLK}+S_{DNM}=x(1-x)S_{ABCD}=100x(1-x).$ Отсюда $S_{KLMN}=100-200x(1-x).$ Имеем уравнение $68=100-200x(1-x),$ $25x^2-25x+4=0,\ \ x=1/5$ или $x=4/5.$

**Ответ:** $1/5$ или $4/5$.

**5.** Найдите множество значений выражения $\dfrac{a\cos x+b\sin x+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, где $x$, $a$, $b$, $c$ – произвольные числа, такие, что $a^2+b^2+c^2\neq 0$. (20 баллов)

**Решение:** Пусть $\vec{n}=(a;b;c)$, $\vec{m}=(\cos x;\sin x;1)$. Тогда $|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $|\vec{m}|=\sqrt{2}$. Рассмотрим функцию $f(x,a,b,c)=\dfrac{a\cos x+b\sin x+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|}=|\vec{m}|\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$, где $\alpha$ - угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{m}$. Множеством значений функции $f$ является отрезок $E=[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$.

**Ответ:** $E=[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$.

**6.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной $a$ точка $K$ является серединой ребра $B_1C_1$, точка $L$ лежит на ребре $C_1D_1$, причем $D_1L=2C_1L$, точка $N$ является серединой ребра $AA_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки $K$, $L$, $N$. Опишите алгоритм построения сечения. Найдите площадь полученного сечения. (20 баллов)

**Решение:**

Алгоритм:

1) Соединяем $K$ и $L$. $E$ – точка пересечения прямых $KL$ и $A_1B_1$.

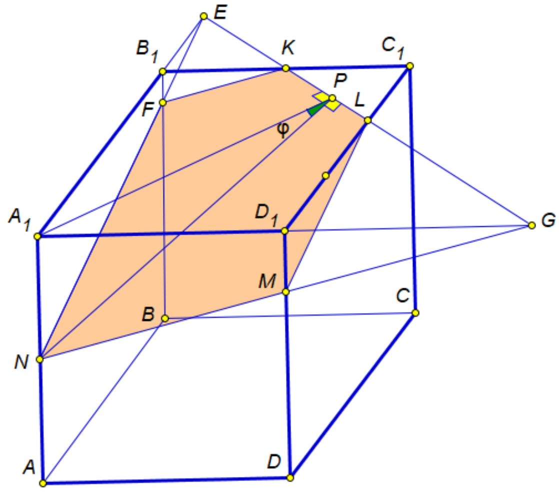
2) Соединяем $E$ и $N$. $F$ – точка пересечения прямых $EN$ и $BB_1$.

3) $G$ – точка пересечения прямых $KL$ и $A_1D_1$.

4) $M$ – точка пересечения прямых $GN$ и $DD_1$.

5) $FKLMN$ – искомое сечение.

$\varphi$ - угол наклона плоскости сечения к плоскости $A_1B_1C_1D_1$.




$$S_{сеч}=\frac{S_{пр}}{\cos\varphi}=\frac{S_{A_1B_1KLD_1}}{\cos\varphi}=\frac{a^2-a^2/12}{\cos\varphi}=\frac{11a^2}{12\cos\varphi}.$$

$$A_1P\cdot KL=2S_{A_1KL}=2(a^2-a^2/4-a^2/12-a^2/3)=2a^2/3.$$

$$A_1P=2a^2/(3KL)=4a/\sqrt{13},\ \cos\varphi=A_1P/NP=\frac{4a}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{a^2/4+16a^2/13}}=\frac{8}{\sqrt{77}}.$$

$S_{сеч}=\dfrac{11a^2\sqrt{77}}{96}$. **Ответ:** $\dfrac{11a^2\sqrt{77}}{96}$.