Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», весна 2020 г.

10 класс

Вариант № 2

1. Клоун ездит по арене цирка на велосипеде, у которого радиус окружности переднего колеса вдвое меньше радиуса окружности заднего колеса. Если бы длину окружности переднего колеса увеличили на метр, а заднего уменьшили на метр, то на протяжении 40 м заднее колесо сделало бы на 20 оборотов больше переднего колеса. Определите длину окружностей колес. (12 баллов)

2. Сравните два числа: $\dfrac{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}\ldots+\sqrt{2}}}}_{n}}{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1}}$, $(n\geq 1)$ и $\dfrac{1}{4}$. (12 баллов)

3. Школьникам раздали 7 листов бумаги и попросили разрезать некоторые из них на 7 частей. Полученные кусочки бумаги перемешали и опять попросили некоторые из них разрезать на 7 частей. Так повторилось несколько раз. Сколько кусков бумаги надо разрезать, чтобы в итоге получился 331 кусок. (16 баллов)

4. Решите уравнение $10x-6+x^2=\sqrt{2x^2-2x+1}\cdot\sqrt{49+(x+4)^2}$ (20 баллов)

5 Дан произвольный выпуклый четырехугольник *ABCD*. Точки *K* и *M* середины сторон *AB* и *CD* соответственно. Точка *P* - точка пересечения линий *KC* и *BM*, точка *N* – пересечение *AM* и *KD*. Найдите площадь четырехугольника *KPNM* , если углы *CBP* и *NDA* равны 30 градусам, *BPC* – 105^0, *DAN*- 15^0. $BP=2\sqrt{2},\ ND=\sqrt{3}$. (20 баллов)

6. При каких значениях параметра *a* корни x_1 , x_2 уравнения $x^2-2ax-\dfrac{1}{a^2}=0$ удовлетворяют равенству $x_1^4+x_2^4=16+8\sqrt{2}$? (20 баллов)

Решение варианта № 2

1. Клоун ездит по арене цирка на велосипеде, у которого радиус окружности переднего колеса вдвое меньше радиуса окружности заднего колеса. Если бы длину окружности переднего колеса увеличили на метр, а заднего уменьшили на метр, то на протяжении 40 м заднее колесо сделало бы на 20 оборотов больше переднего колеса. Определите длину окружностей колес. (12 баллов)

Решение. Длина окружности переднего колеса $C_n = 2\pi R_n$, заднего - $C_z = 2\pi R_z = 2\pi 2R_n$, количество оборотов после изменений длин окружностей связаны соотношением

$$\frac{40}{C_z - 1} - 20 = \frac{40}{C_n + 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{2C_n - 1} - 1 = \frac{2}{C_n + 1} \;\Rightarrow\; 2C_n^{\;2} + 3C_n - 5 = 0 \;\Rightarrow\; C_n = \left[\begin{array}{l} 1 \\ -10/4 < 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow\; C_n = 1,\, C_z = 2.$

Ответ: 1; 2.

2. Сравните два числа: $A = \dfrac{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} \ldots + \sqrt{2}}}}_{n}}{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1}}$ и $\dfrac{1}{4}$. (12 баллов)

Решение и ответ. $A = \dfrac{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} \ldots + \sqrt{2}}}}_{n}}{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1}} = \dfrac{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} \ldots + \sqrt{2}}}}_{n}}{\left(2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n}\right)\left(2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n}\right)} =$

$$= \frac{1}{\left(2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n}\right)} > \frac{1}{4}, \quad n \ge 1$$

3. Школьникам раздали 7 листов бумаги и попросили разрезать некоторые из них на 7 частей. Полученные кусочки бумаги перемешали и опять попросили некоторые из них разрезать на 7 частей. Так повторилось несколько раз. Сколько кусков бумаги надо разрезать, чтобы в итоге получился 331 кусок. (16 баллов)

Решение. После k разрезаний остается $6k+7$ кусочков. Поэтому для определения количества разрезанных кусков решим уравнение $6k + 7 = 331 \quad \Rightarrow \quad k = 54.$

Ответ: 54.

4. Решите уравнение $10x - 6 + x^2 = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \cdot \sqrt{36 + (x+4)^2}$ (20 баллов)

Решение. Преобразуем уравнение $10x - 6 + x^2 = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \cdot \sqrt{36 + (x+4)^2}$

$$10x - 6 + x^2 = \sqrt{x^2 + x^2 - 2x + 1} \cdot \sqrt{36 + (x+4)^2} \quad \Rightarrow \quad 6x - 6 + x^2 + 4x = \sqrt{x^2 + (x-1)^2} \cdot \sqrt{6^2 + (x+4)^2},$$

Это уравнение можно интерпретировать как скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x-1,\, x)$, $\vec{b} = (6, x+4)$, записанное двумя способами - сумма произведений соответствующих координат и произведение длин векторов на косинус угла между ними, который в данном случае равен 1. Косинус равен единице, если вектора сонаправлены, т.е. их координаты пропорциональны

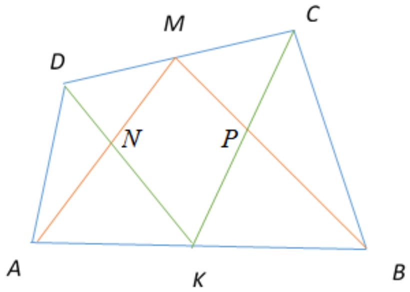
$$\frac{x-1}{6}=\frac{x}{x+4} \quad \Rightarrow \quad x^2+3x-4=6x \quad \Rightarrow \quad x^2-3x-4=0 \Rightarrow x=\left[\begin{array}{l}-1\\4\end{array}\right.$$, но $x=-1$ лишний корень.

Ответ: 4.

5. Дан произвольный выпуклый четырехугольник *ABCD*. Точки *К* и *М* середины сторон *АВ* и *CD* соответственно. Точка *Р* - точка пересечения линий *КС* и *ВМ*, точка *N* – пересечение *AM* и *КD*. Найдите площадь четырехугольника *KPNM* , если углы *CBP* и *NDA* равны 30 градусам, $BPC-105^0$, DAN- 15^0. $BP=2\sqrt{2},\ ND=\sqrt{3}.$ (20 баллов)

Решение и ответ.

$$S_{KPMN}=S_{AMB}-S_{ANK}-S_{KPB}=S_{ADK}+S_{KCB}-S_{ANK}-S_{KPB}=S_{ADN}+S_{PCB}$$



По теореме синусов

$$\frac{AN}{\sin 30}=\frac{ND}{\sin 15} \quad \Rightarrow \quad AN=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{2} \quad \Rightarrow$$

$$S_{AND}=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{2}\sin 135=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{2}\cos 45=\frac{3(\sqrt{3}+1)}{4}$$

Аналогично $\dfrac{CB}{\sin 105}=\dfrac{PB}{\sin 45} \quad \Rightarrow \quad BC=2\sqrt{2}\cos 15\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{4(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow$

$$S_{CPB}=\frac{1}{2}2\sqrt{2}\,\frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}\sin 105=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{1}\cos 45=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$S_{KPMN}=\frac{3(\sqrt{3}+1)}{4}+\frac{4\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}=\frac{(\sqrt{3}+1)(4\sqrt{2}+3)}{4}$$

6. При каких значениях параметра a корни x_1 , x_2 уравнения $x^2-2ax-\dfrac{1}{a^2}=0$ удовлетворяют равенству $x_1^4+x_2^4=16+8\sqrt{2}$? (20 баллов)

Решение. Воспользуемся теоремой Виета: $x_1x_2=-\dfrac{1}{2a^2}$, $x_1+x_2=2a$, выразим сумму четвертых степеней:

$$x_1^4+x_2^4=(x_1+x_2)^4-4x_1x_2((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)-6x_1^2x_2^2=16a^4-4(-\frac{1}{a^2})4a^2+2(-\frac{1}{a^2})^2$$

$$=16a^4+16+\frac{2}{a^4}=16+8\sqrt{2} \ \Rightarrow \ 16a^8-8\sqrt{2}a^4+2=0 \ \Rightarrow \ (2\sqrt{2}a^4-1)^2=0$$

Ответ: $a=\pm\sqrt[8]{1/8}.$