Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», весна 2020 г.

10 класс

Вариант № 1

1. В 100 емкостях трех типов вместимости по 1 *л*, 10 *л* и 50 *л* разлито 500 литров масла. Сколько потребовалось емкостей каждого типа, если количество масла в каждой емкости соответствует ее вместимости? (12 баллов)

2. Решите неравенство $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{40}{x}+\dfrac{48}{x^2}\geq\dfrac{10|x|}{3}.$ (12 баллов)

3. Наибольший общий делитель двух натуральных чисел a и b равен d. Определите наибольший общий делитель чисел $5a+3b$ и $13a+8b.$ (16 баллов)

4. Найдите все натуральные числа $n\geq 2,$ для которых верно равенство

$$4x_n+2y_n=55n^2+61n-116, \text{ где}$$

$x_n=1\cdot 2+2\cdot 3+\dots+(n-1)\cdot n,\ y_n=1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2.$ (20 баллов)

5. Укажите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}\left(\dfrac{2y}{3}-\dfrac{|x-1|}{x-1}-1\right)(y-1)=0,\\ y=a+\dfrac{|x-1|}{(x-1)(x-y)^2}\end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Найдите эти решения при каждом указанном a. (20 баллов)

6. В треугольнике ABC через произвольную точку O проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате треугольник ABC разбивается на три параллелограмма и три треугольника. Площади получившихся треугольников равны 6 *см*^{2}, 24 *см*^{2}, 54 *см*^{2}. Найдите площадь треугольника ABC. (20 баллов)

Решение варианта № 1

1. В 100 емкостях трех типов вместимостью 1 *л*, 10 *л* и 50 *л* разлито 500 литров масла. Сколько потребовалось емкостей каждого типа, если количество масла в каждой емкости соответствует ее вместимости? (12 баллов)

Решение. Пусть n, m, k потребовалось емкостей вместимостью 1 *л*, 10 *л* и 50 *л* соответственно. Тогда $\begin{cases} n+10m+50k=500, \\ n+m+k=100. \end{cases}$ Поскольку $n=500-10m-50k=10(50-m-5k),$ то n делится на 10 нацело, т.е. $n=10l, l\in N, n\le 100, l\le 10.$ $\begin{cases} l+m+5k=50, \\ 10l+m+k=100, \end{cases}$ $\begin{cases} l+m+5k=50, \\ 9l-4k=50, \end{cases}$ $\Rightarrow\ l=5+(5+4k)/9$, $(5+4k)/9\le 5, (5+4k)/9\in N.$ Отсюда имеем $k\le 10, (5+4k)/9\in N, \Rightarrow$ $k=1, k=10.$ Тогда 1) $k=1,\ l=6, n=60, m=39;$ 2) $k=10,\ l=10, n=100, m<0$, нет целых неотрицательных решений.

Ответ: 60 по 1л, 39 по 10 л, 1 по 50 л.

2. Решите неравенство $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{40}{x}+\dfrac{48}{x^2}\ge\dfrac{10|x|}{3}.$ (12 баллов)

Решение. 1) $x>0,\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{40}{x}+\dfrac{48}{x^2}\ge\dfrac{10x}{3},\quad x^2+\dfrac{144}{x^2}\ge 10\left(x-\dfrac{12}{x}\right).$ Сделаем замену $t=x-\dfrac{12}{x}$, $t^2-10t+24\ge 0,\quad t\le 4,$ или $t\ge 6.$ Возвращаемся к переменной x: $x-\dfrac{12}{x}\le 4, \dfrac{x^2-4x-12}{x}\le 0,$ $\dfrac{(x-6)(x+2)}{x}\le 0.$ Учитывая $x>0,$ имеем $x\in(0;6].$ Решаем второе неравенство $x-\dfrac{12}{x}\ge 6, \dfrac{x^2-6x-12}{x}\ge 0, \dfrac{(x-3-\sqrt{21})(x-3+\sqrt{21})}{x}\le 0.$ Учитывая $x>0,$ имеем $x\in[3+\sqrt{21};+\infty).$ Итак, $x\in(0;6]\cup[3+\sqrt{21};+\infty).$

2) $x<0, \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{40}{x}+\dfrac{48}{x^2}\ge-\dfrac{10x}{3},\quad x^2+\dfrac{144}{x^2}\ge-10\left(x+\dfrac{12}{x}\right).$ Сделаем замену $t=x+\dfrac{12}{x}$, $t^2+10t-24\ge 0,$ $t\le-12,$ или $t\ge 2.$ Возвращаемся к переменной x: $x+\dfrac{12}{x}\le-12, \dfrac{x^2+12x+12}{x}\le 0,$ $\dfrac{(x-6-2\sqrt{6})(x-6+2\sqrt{6})}{x}\le 0.$ Учитывая $x<0,$ имеем $x\in(-\infty;-6-2\sqrt{6}]\cup[-6+2\sqrt{6};0).$ Решаем второе неравенство $x+\dfrac{12}{x}\ge 2, \dfrac{x^2-2x+12}{x}\ge 0.$ Числитель положительный при любом значении *x*. Неравенство отрицательных решений не имеет. Итак, $x\in(-\infty;-6-2\sqrt{6}]\cup[-6+2\sqrt{6};0).$

Ответ: $x\in(-\infty;-6-2\sqrt{6}]\cup[-6+2\sqrt{6};0)\cup(0;6]\cup[3+\sqrt{21};+\infty).$

3. Наибольший общий делитель двух натуральных чисел *a* и *b* равен *d*. Определите наибольший общий делитель чисел $5a+3b$ и $13a+8b.$ (16 баллов)

Решение. $НОД(5a+3b,13a+8b)=d_1,\ НОД(a,b)=d,$

$8(5a+3b)\vdots d_1, 3(13a+8b)\vdots d_1\quad\Rightarrow(8(5a+3b)-3(13a+8b))\vdots d_1\quad\Rightarrow\ a\vdots d_1.$

$13(5a+3b)\vdots d_1, 5(13a+8b)\vdots d_1\quad\Rightarrow(13(5a+3b)-5(13a+8b))\vdots d_1\quad\Rightarrow\ b\vdots d_1.$

$\Rightarrow\quad d\vdots d_1.$

Поскольку $a \vdots d$ и $b \vdots d$, то $5a+3b \vdots d$ и $13a+8b \vdots d, \Rightarrow\ d_1 \vdots d$. Таким образом, $d_1 = d$.
Ответ: d.

4. Найдите все натуральные числа $n \geq 2$, для которых верно равенство $4x_n + 2y_n = 55n^2 + 61n - 116$, где $x_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots + (n-1)\cdot n$, $y_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2$. (20 баллов)

Решение: Пусть $z_n = 1+2+\dots+n = \dfrac{(n+1)n}{2} = \dfrac{n^2+n}{2}$. Имеем

$$\begin{aligned}
x_n &= 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots + (n-1)\cdot n = (2+3+\dots n) + (3+4+\dots n) + \dots((n-1)+n) + n = \\
&= (z_n - z_1) + (z_n - z_2) + \dots + (z_n - z_{n-1}) = (n-1)z_n - (z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1}) = \\
&= \frac{1}{2}\Big((n-1)n(n+1) - (1^2 + 1 + 2^2 + 2 + \dots + (n-1)^2 + (n-1)\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\big((n-1)n(n+1) - (y_n + z_{n-1})\big).
\end{aligned}$$

Подставим полученное выражение в равенство $4x_n + 2y_n = 55n^2 + 61n - 116$. Получаем

$$2\big((n-1)n(n+1) - (y_n + z_{n-1})\big) + 2y_n = 55n^2 + 61n - 116,\ 2(n-1)n(n+1) - n(n-1) = 55n^2 + 61n - 116,$$
$$(n-1)(2n(n+1) - n) = (n-1)(55n + 116),\ \ 2n^2 - 54n - 116 = 0,\ n^2 - 27n - 58 = 0,\ n = 29.$$

Ответ: $n = 29$.

5. Укажите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2y}{3} - \dfrac{|x-1|}{x-1} - 1\right)(y-1) = 0, \\ y = a + \dfrac{|x-1|}{(x-1)(x-y)^2} \end{cases}$$

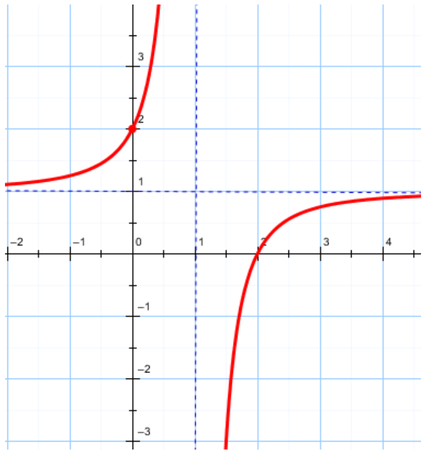
имеет ровно четыре различных решения.

Найдите эти решения при каждом указанном a. (20 баллов)

Решение: 1) $x > 1$, $\begin{cases} \left(\dfrac{2y}{3} - 2\right)(y-1) = 0, \\ y = a + \dfrac{1}{(x-y)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3,\, 3 = a + \dfrac{1}{(x-3)^2} \\ y = 1,\, 1 = a + \dfrac{1}{(x-1)^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3,\, a = 3 - \dfrac{1}{(x-3)^2} \\ y = 1,\, a = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} \end{array}\right.$

2) $x < 1$, $\begin{cases} y(y-1) = 0, \\ y = a - \dfrac{1}{(x-y)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0,\, 0 = a - \dfrac{1}{x^2} \\ y = 1,\, 1 = a - \dfrac{1}{(x-1)^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0,\, a = \dfrac{1}{x^2} \\ y = 1,\, a = 1 + \dfrac{1}{(x-1)^2} \end{array}\right.$

I. Если $y=1$, $\quad$ 1) $x>1, a=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $\quad$ 2) $x<1$, $a=1+\dfrac{1}{(x-1)^2}$.



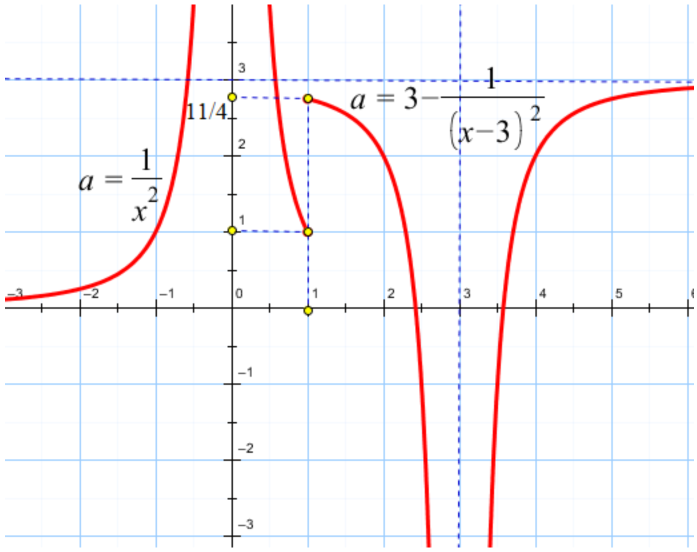
Для любого $a\neq 1$, $\quad a<1, x=1+\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$, $\quad a>1, x=1-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}$,

есть одно решение.

II. Если 1) $y=3$, $x>1, a=3-\dfrac{1}{(x-3)^2}$, $\quad$ 2) $y=0, x<1$, $a=\dfrac{1}{x^2}$.

При $a=1$ система имеет три различные решения. При $a\neq 1$ нужно выяснить, при каких a система будет иметь три различные решения в случае II. При $a\in(0;1)$ имеем

$y_1=0$, $\quad x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$, $\quad y_{2/3}=3$, $\quad x_{2/3}=3\pm\dfrac{1}{\sqrt{3-a}}$.



При $a\in[11/4;3)$ имеем $y_{1/2}=0$, $\quad x_{1/2}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{a}}$,

$y_3=3$, $\quad x_3=3+\dfrac{1}{\sqrt{3-a}}$.

Ответ: При $a\in(0;1)$ имеем $y_1=0$, $\quad x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$,

$y_{2/3}=3$, $\quad x_{2/3}=3\pm\dfrac{1}{\sqrt{3-a}}$, $y_4=1$, $x_4=1+\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$.

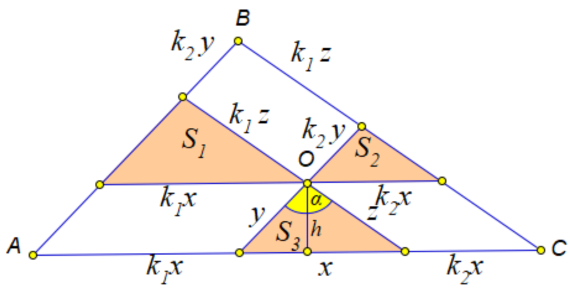
При $a\in[11/4;3)$ имеем $y_{1/2}=0$, $\quad x_{1/2}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{a}}$,

$y_3=3$, $\quad x_3=3+\dfrac{1}{\sqrt{3-a}}$, $y_4=1$, $x_4=1-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}$.

6. В треугольнике ABC через произвольную точку O проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате треугольник ABC разбивается на три параллелограмма и три треугольника. Площади получившихся треугольников равны 6 *см*^{2}, 24 *см*^{2}, 54 *см*^{2}. Найдите площадь треугольника ABC. (20 баллов)

Решение:

Треугольники подобны. Пусть первый и третий подобны с коэффициентом подобия k_1, второй и третий с коэффициентом подобия k_2. Тогда для площадей этих треугольников имеем соотношения $\dfrac{S_1}{S_3}=k_1^2$, $\dfrac{S_2}{S_3}=k_2^2$.



Площади параллелограммов выражаются следующим образом: $\quad S_{1p}=k_1xh=2k_1S_3$, $S_{2p}=k_2xh=2k_2S_3$,

$S_{3p}=k_1k_2yz\sin\alpha=2k_1k_2S_3$.

$$S_{ABC}=S_1+S_2+S_3+2(k_1+k_2+k_1k_2)S_3=S_1+S_2+S_3+2\left(\sqrt{\frac{S_1}{S_3}}+\sqrt{\frac{S_2}{S_3}}+\frac{\sqrt{S_1S_2}}{S_3}\right)S_3=$$

$$=S_1+S_2+S_3+2\sqrt{S_1S_3}+2\sqrt{S_2S_3}+2\sqrt{S_1S_2}=6+24+54+2\sqrt{6\cdot 54}+2\sqrt{24\cdot 54}+2\sqrt{6\cdot 24}=216.$$

Ответ: 216.