Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», осень 2019 г.

9 класс

Вариант № 2

1. *(9 баллов)* Если натуральное двузначное число уменьшить на 27, то получится двузначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. В ответе укажите медиану числового ряда, составленного из всех таких чисел.

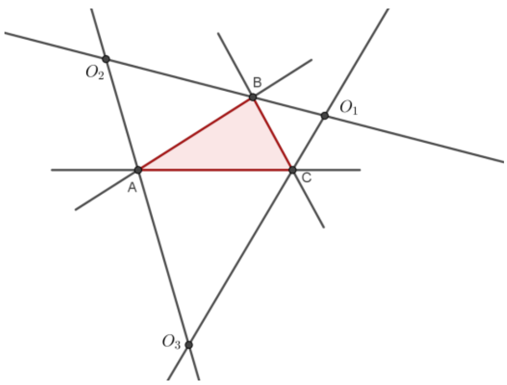
2. *(9 баллов)* Найдите сумму всех целых значений h, при которых уравнение $\left|\left|r+h\right|-3r\right|-7r=12\left|r-2\right|$ относительно r имеет не более одного корня.

3. *(9 баллов)* На учебных стрельбах каждый из солдат стрелял по 10 раз. Один из них выполнил задание удачно и выбил 90 очков. Сколько раз он выбил 8 очков, если десяток было 4, результатами попаданий были семёрки, восьмёрки и девятки. При этом промахов не было ни одного.

4. *(9 баллов)* Бабушка и внучка собирали землянику, внучка – в детское ведёрко вместимостью 2,5 л, а бабушка – в двухлитровую банку. Бабушка плохо видит и нагибаться ей тяжело, поэтому внучка всё время собирала ягоды быстрее неё. Когда бабушка набрала половину своей банки, они с внучкой поменялись своими ёмкостями для сбора ягод и через некоторое время наполнили их одновременно. Сколько литров ягод собрала внучка за всё время работы, если считать, что производительность труда и бабушки и внучки всё время одинакова?

5. *(12 баллов)* Эльвира берёт тройку чисел и преобразует её по правилу: на каждом шаге каждое число заменяется на сумму двух остальных. Чему равна разность между самым большим и самым маленьким числами в тройке на 2019-ом шаге применения этого правила, если изначальная тройка чисел была {100; 89; 60}? Если вопрос задачи допускает несколько вариантов ответа, то выпишите их без пробела в порядке возрастания.

6. *(12 баллов)* Дан треугольник ABC. Прямые O_1O_2, O_1O_3, O_3O_2 - биссектрисы внешних углов треугольника ABC, как показано на рисунке. Точка O - центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найти угол в градусах между прямыми O_1O и O_2O_3.



7. *(12 баллов)* На сторонах AB и AC прямоугольного треугольника ABC$\left(\angle BAC = 90^0\right)$, внешним образом построены прямоугольные треугольники ABT и ACK так, что $\angle ATB = \angle AKC = 90^0$, $\angle ABT = \angle ACK = 30^0$, на стороне BC выбрана точка M так, что BM=MC. Определите градусную меру угла KMT.

8. *(14 баллов)* В прямоугольнике $ABCD$ известно соотношение длин сторон $AB : AD = 1:3$. Точка K принадлежит AD и делит ее в отношении 2:1, считая от точки A. Найти сумму градусных мер углов $\angle AKB$ и $\angle ADB$.

9. *(14 баллов)* Студент-химик провел эксперимент: из бутыли, наполненной раствором сиропа вылил один литр жидкости, долил бутыль водой, потом опять вылил один литр жидкости и опять долил бутыль водой. В результате процентное содержание сиропа снизилось с 9 до 4 процентов. Определить объем бутыли в литрах.

Решение варианта № 2

1.Если натуральное двузначное число уменьшить на 27, то получится двузначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. В ответе укажите медиану числового ряда, составленного из всех таких чисел.

Решение.

Пусть $\overline{xy} = 10x + y$ - исходное двузначное число, тогда $\overline{yx} = 10y + x$ - число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Получим уравнение $10x + y = 10y + x + 27$. Из уравнения видно, что двузначное число больше 27. Начнем исследование с числа десятков равному 3.

x	*уравнение*	*y*	*число*
3	$30 + y = 10y + 3 + 27$	$y = 0$	30 не подходит по условию
4	$40 + y = 10y + 4 + 27$	$y = 1$	41
5	$50 + y = 10y + 5 + 27$	$y = 2$	52
6	$60 + y = 10y + 6 + 27$	$y = 3$	63
7	$70 + y = 10y + 7 + 27$	$y = 4$	74
8	$80 + y = 10y + 8 + 27$	$y = 5$	85
9	$90 + y = 10y + 9 + 27$	$y = 6$	96

Это могут быть числа 41, 52, 63, 74, 85, 96. Медиана ряда равна 68,5.
Ответ: 68,5.

2. Найдите сумму всех целых значений h, при которых уравнение $||r+h|-3r|-7r=12|r-2|$ относительно r имеет не более одного корня.

Решение. Рассмотрим функцию $f(r)=12|r-2|+7r-||r+h|-3r|$. Коэффициент при первом модуле больше суммы модулей остальных коэффициентов при r (12>7+1+3). Отсюда следует, что на всех интервалах до $r=2$ коэффициент в линейном выражении отрицателен, а после $r=2$ - положителен, $r=2$ - точка минимума. Для того, чтобы уравнение $f(r)=0$ имело не более одного корня необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство: $f(2)\geq 0.$ Решим неравенство.

Обозначим $|2+h|=t,$ получим $14-|t-6|\geq 0,$ $(t-6)^2-14^2\leq 0,$

$$(t-20)(t+8)\leq 0,\ t\in[-8;20],\ |h+2|\leq 20,\ h\in[-22;18],$$

сумма целых значений h: $-82.$
Ответ: $-82.$

3. На учебных стрельбах каждый из солдат стрелял по 10 раз. Один из них выполнил задание удачно и выбил 90 очков. Сколько раз он выбил 8 очков, если десяток было 4, результатами попаданий были семёрки, восьмёрки и девятки. При этом промахов не было ни одного.

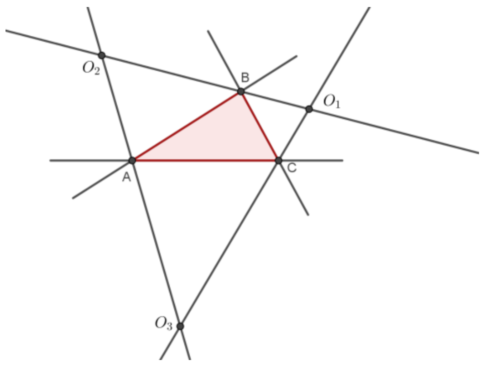
Решение. Так как солдат выбил 90 очков и 40 из них набрал за 4 раза, то за оставшиеся 6 выстрелов он набрал 50 очков. Поскольку солдат попадал только в семерку, восьмерку и девятку, то пусть за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмёрку и девятку) он набрал 24 очка. Тогда за

оставшиеся три выстрела он набрал 26 очков, что возможно только при единственной комбинации чисел 7, 8, 9: 8+9+9=26. Таким образом, в семёрку стрелок попал один раз, в восьмёрку два раза, а в девятку – три раза.
Ответ: 2.

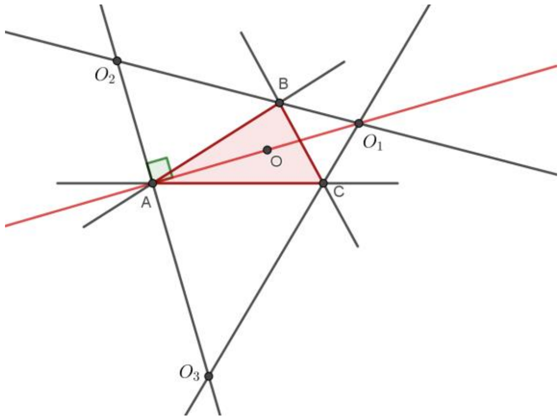
4. Бабушка и внучка собирали землянику, внучка – в детское ведёрко вместимостью 2,5 л, а бабушка – в двухлитровую банку. Бабушка плохо видит и нагибаться ей тяжело, поэтому внучка всё время собирала ягоды быстрее неё. Когда бабушка набрала половину своей банки, они с внучкой поменялись своими ёмкостями для сбора ягод и через некоторое время наполнили их одновременно. Сколько литров ягод собрала внучка за всё время работы, если считать, что производительность труда и бабушки и внучки всё время одинакова?
Решение. Пусть внучка собрала x л ягод за то время, за которое бабушка собрала 1 л, $x>1$ по условию задачи. После обмена ёмкостями внучка собрала 1 л ягод, а бабушка $\left(2{,}5-x\right)$ л. Так как производительность их труда не меняется, то и отношение количества собранных ягод постоянно. Составим уравнение: $\frac{1}{x}=\frac{2{,}5-x}{1}$; $2x^2-5x+2=0$, которое имеет два корня $x_1=2, x_2=0{,}5$.
Второй корень не подходит по условию задачи. Всего внучка собрала 2+1=3 л ягод.
Ответ: 3**.**

5. Эльвира берёт тройку чисел и преобразует её по правилу: на каждом шаге каждое число заменяется на сумму двух остальных. Чему равна разность между самым большим и самым маленьким числами в тройке на 2019-ом шаге применения этого правила, если изначальная тройка чисел была {100; 89; 60}? Если вопрос задачи допускает несколько вариантов ответа, то выпишите их без пробела в порядке возрастания.
Решение. Обозначим 3 числа, как {x; x+a; x+b}, где 0<a<b. Тогда разность между самым большим и самым маленьким числом на любом шаге, начиная с нулевого шага, будет инвариантом, то есть неизменной и равняться b.
b=100-60=40.
Ответ: 40.

6. Дан треугольник ABC. Прямые O_1O_2, O_1O_3, O_3O_2 - биссектрисы внешних углов треугольника ABC, как показано на рисунке. Точка O - центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найти угол в градусах между прямыми O_1O и O_2O_3.



Решение. Точка O - точка пересечения биссектрис треугольника ABC, следовательно, биссектриса AO перпендикулярна прямой O_2O_3 (как биссектрисы смежных углов треугольника).

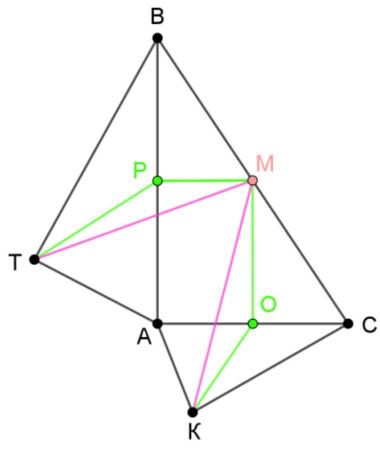


Точка O_1, как равноудаленная от прямых AB и AC, лежит на AO. Следовательно, прямая O_1O, совпадающая с AO, перпендикулярна прямой O_2O_3.

Ответ: 90.

7. На сторонах AB и AC прямоугольного треугольника ABC$\left(\angle BAC = 90^0\right)$, внешним образом построены прямоугольные треугольники ABT и ACK так, что $\angle ATB = \angle AKC = 90^0$, $\angle ABT = \angle ACK = 30^0$, на стороне BC выбрана точка M так, что BM=MC. Определите градусную меру угла KMT.

Решение. На серединах сторон AB и AC отметим точки P и O, соответственно. Соединим точку P с точками M и T, а точку O с точками K и M.



Тогда: 1) $\Delta TPM = \Delta KOM$, по двум сторонам и углу между ними, так как

$$AO = \tfrac{1}{2}AC = KO = PM\ ,$$

$$AP = \tfrac{1}{2}AB = TP = OM\ ,$$

$$\angle TPM = \angle TPA + \angle APM = \angle AOK + \angle AOM = \angle KOM .$$

Значит TM=MK, $\angle PMT = \angle MKO$, и $\angle PTM = \angle KMO$.

2) Найдём сумму углов $\angle PMT$ и $\angle KMO$:

$$\angle PMT + \angle KMO = \angle MKO + \angle KMO = 180^0 - \angle MOK.$$

В свою очередь $\angle MOK = 360^0 - \angle KOC - \angle MOC = 360^0 - 120^0 - \angle BAC = 240^0 - \angle BAC.$

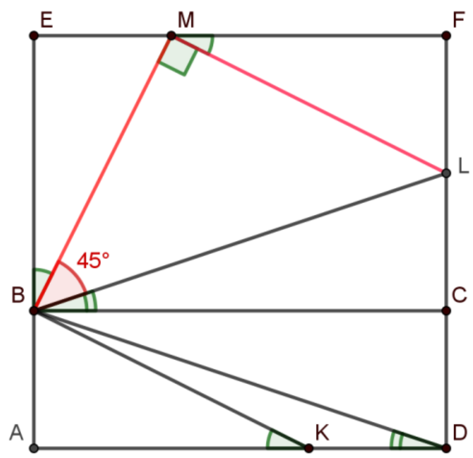
3) $\angle KMT = \angle PMO - \left(\angle PMT + \angle KMO\right) = \angle BAC - \left(180^0 - \angle MOK\right) \Rightarrow$

$\angle KMT = \angle BAC - 180^0 + 240^0 - \angle BAC = 60^0.$

Ответ: 60.

8. В прямоугольнике $ABCD$ известно соотношение длин сторон $AB : AD = 1:3$. Точка K принадлежит AD и делит ее в отношении 2:1, считая от точки A. Найти сумму градусных мер углов $\angle AKB$ и $\angle ADB$.

Решение. Достроим прямоугольник $ABCD$ до квадрата $AEFD$ со стороной AD.



1. Пусть $M \in EF, EM : MF = 1:2,\ L \in FD, FL = LC.$ Тогда получаем равные треугольники: $\triangle AKB = \triangle EBM = \triangle FML.$
2. Далее, $BM = ML,\ \angle BML = 90^0,$ следовательно, $\angle MBL = 45^0.$
3. Окончательно,

$$\angle AKB + \angle ADB = \angle EBM + \angle LBC = 90^0 - \angle LBM = 90^0 - 45^0 = 45^0.$$

Ответ: 45.

9. Студент-химик провел эксперимент: из бутыли, наполненной раствором сиропа вылил один литр жидкости, долил бутыль водой, потом опять вылил один литр жидкости и опять долил бутыль водой. В результате процентное содержание сиропа снизилось с 9 до 4 процентов. Определить объем бутыли в литрах.

Решение.

1) Пусть x - объем бутыли в литрах.
2) Тогда после отлития одного литра жидкости осталось $\left(x-1\right)$ литров раствора, а в нем $\left(x-1\right)\cdot\dfrac{9}{100}$ литров сиропа и $\left(x-1\right)\cdot\dfrac{91}{100}$ воды.

3) После того как долили один литр воды в бутыли стало: x литров раствора, а в нем $(x-1)\cdot\frac{9}{100}$ литров сиропа и $(x-1)\cdot\frac{91}{100}+1$ литров воды.

4) В конце всех переливаний в бутыли стало: x литров раствора, а в нем $x\cdot\frac{4}{100}$ литров сиропа и $x\cdot\frac{96}{100}$ воды.

5) Тогда до последнего долития литра воды в бутыли было $(x-1)$ литров раствора, а в нем $x\cdot\frac{4}{100}$ литров сиропа и $x\cdot\frac{96}{100}-1$ воды. Это та же жидкость, что и в пункте 3) решения, соответственно соотношения жидкости и воды в ней одинаково.

Составим уравнение:

$$\frac{(x-1)\cdot\frac{9}{100}}{x\cdot\frac{4}{100}}=\frac{(x-1)\cdot\frac{91}{100}+1}{x\cdot\frac{96}{100}-1}\Leftrightarrow\frac{(x-1)\cdot 9}{x\cdot 4}=\frac{(x-1)\cdot 91+100}{x\cdot 96-100}\Leftrightarrow$$

$$\frac{9x-9}{4x}=\frac{91x+9}{96x-100}\Leftrightarrow(9x-9)(96x-100)=4x(91x+9)\Leftrightarrow$$

$$5x^2-18x+9=0\Leftrightarrow x\in\{3;0,6\}.$$

0,6 литров не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 3.