Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», осень 2019 г.

8 класс

Вариант № 2

1. *(9 баллов)* Часы показывают 00:00, при этом часовая и минутная стрелки часов совпадают. Считая это совпадение под номером 0, определите, через какой промежуток времени (в минутах) они совпадут в 21 раз. Если ответ не целый, то округлить результат до сотых по правилам округления.

2. *(9 баллов)* Чтобы попасть на дачу семьи Соловьёвых надо сначала идти от станции 3 км по шоссе, а затем 2 км по тропинке. Приехав на станцию, мама позвонила на дачу сыну Васе и попросила встретить её на велосипеде. Движение навстречу друг другу они начали одновременно. Мама всё время идёт с постоянной скоростью 4 км/ч, а Вася по тропинке едет со скоростью 20 км/ч, а по шоссе со скоростью 22 км/ч. На каком расстоянии от станции Вася встретил маму? Ответ дайте в метрах.

3. *(9 баллов)* На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно так, что $\angle CMA = \angle ANC$. Отрезки MC и AN пересекаются в точке O, причем $ON = OM$. Найдите BC, если$AM = 3см$,$BM = 4см$.

4. *(9 баллов)* Если двузначное число уменьшить на 54, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. В ответе укажите среднее арифметическое получившихся чисел.

5. *(12 баллов)* На учебных стрельбах каждый из солдат стрелял по 10 раз. Один из них выполнил задание удачно и выбил 90 очков. Сколько раз он выбил 9 очков, если десяток было 4, а результатами остальных попаданий были семёрки, восьмёрки и девятки. При этом промахов не было ни одного.

6. *(12 баллов)* Игроки делят фишки. Первый игрок берет m фишек и шестую часть остатка; второй – $2m$ фишек и шестую часть нового остатка; третий – $3m$ фишек и шестую часть нового остатка и т.д. Оказалось, что таким образом фишки были разделены поровну. Сколько было игроков?

7. *(12 баллов)* В прямоугольнике $ABCD$ точка E расположена на диагонали ACтак, что $BC = EC$, точка M - на стороне BC так, что $EM = MC$. Найдите длину отрезка MC, если $BM= 6$, $AE = 3$. Если ответ не целый, то округлить результат до десятых по правилам округления.

8. *(14 баллов)* Дан треугольник ABC. $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$. Прямые O_1O_2, O_2O_3, O_1O_3 - биссектрисы внешних углов треугольника ABC, как показано на рисунке. Точка О - центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найти угол между прямыми CO_1 и O_2O_3.

9. *(14 баллов)* При каких значениях параметра $\boldsymbol{a}$ уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение, если $f(x) = \left|\frac{2x^3-5x^2-2x+5}{(1,5x-3)^2-(0,5x-2)^2}\right|$, $p(x) = |2x+5| + a$. Если значений параметра больше одного, то в ответе укажите их сумму.

Решение варианта № 2

1. Часы показывают 00:00, при этом часовая и минутная стрелки часов совпадают. Считая это совпадение под номером 0, определите, через какой промежуток времени (в минутах) они совпадут в 21 раз. Если ответ не целый, то округлить результат до сотых по правилам округления.

Решение:
Минутная стрелка проходит за час 1 круг, а часовая 1/12 круга, значит скорость их сближения 11/12 круга в час, одно сближение занимает 1/(11/12)=12/11 часа или 720/11 минут. 19 сближений это 21*720/11=15120/11=1374,55 минут.

Ответ: 1374,55.

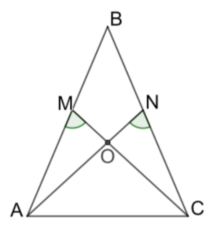
2. Чтобы попасть на дачу семьи Соловьёвых надо сначала идти от станции 3 км по шоссе, а затем 2 км по тропинке. Приехав на станцию, мама позвонила на дачу сыну Васе и попросила встретить её на велосипеде. Движение навстречу друг другу они начали одновременно. Мама всё время идёт с постоянной скоростью 4 км/ч, а Вася по тропинке едет со скоростью 20 км/ч, а по шоссе со скоростью 22 км/ч. На каком расстоянии от станции Вася встретил маму? Ответ дайте в метрах.

Решение:
2 километра по тропинке Вася проехал за 2:20=0,1 часа. За это время мама прошла 4·0,1=0,4 км. После этого Вася и мама стали двигаться навстречу друг другу по шоссе с постоянными скоростями. 3-0,4=2,6 км. Составим уравнение (22+4)·t=2,6; откуда t=0,1 часа. То есть время, через которое встретились мама и Вася равно 0,1+0,1=0,2 часа. За это время мама прошла 4·0,2=0,8 км или 800 метров.

Ответ: 800 м.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно так, что $\angle CMA = \angle ANC$. Отрезки MC и AN пересекаются в точке O, причем $ON = OM$. Найдите BC, если AM = 3*см*,BM = 4*см*.

Решение:



Треугольники AMO и CNO равны ($\angle AMO = \angle CNO$, ON=OM, $\angle MOA = \angle NOC$,как вертикальные). Следовательно, AM = NC, $\angle MAO = \angle NCO$ и OA = OC. Получаем, что треугольник AOC равнобедренный, а, значит, углы CAO и ACO равны. Откуда треугольник ABC равнобедренный и AB = BC = 8 *см*.

Ответ: 8 см.

4. Если двузначное число уменьшить на 54, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. В ответе укажите среднее арифметическое получившихся чисел.

Решение:

$\overline{xy} = 10x + y$ - исходное двузначное число, тогда $\overline{yx} = 10y + x$ - число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Получим уравнение $10x + y = 10y + x + 54$.

Из уравнения видно, что двузначное число больше 54. Начнем исследование с числа десятков, равному 6.

x	***уравнение***	***y***	***число***
6	$60 + y = 10y + 6 + 54$	$y = 0$	60 не подходит по условию
7	$70 + y = 10y + 7 + 54$	$y = 1$	71
8	$80 + y = 10y + 8 + 54$	$y = 2$	82
9	$90 + y = 10y + 9 + 54$	$y = 3$	93

Это могут быть числа 71, 82, 93. Среднее арифметическое чисел равно 82.

Ответ: 82.

5. На учебных стрельбах каждый из солдат стрелял по 10 раз. Один из них выполнил задание удачно и выбил 90 очков. Сколько раз он выбил 9 очков, если десяток было 4, а результатами остальных попаданий были семёрки, восьмёрки и девятки. При этом промахов не было ни одного.

Решение:
Так как солдат выбил 90 очков и 40 из них набрал за 4 раза, то за оставшиеся 6 выстрелов он набрал 50 очков. Поскольку солдат попадал только в семерку, восьмерку и девятку, то пусть за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмёрку и девятку) он набрал 24 очка. Тогда за оставшиеся три выстрела он набрал 26 очков, что возможно только при единственной комбинации чисел 7, 8, 9: 8+9+9=26. Таким образом, в семёрку стрелок попал один раз, в восьмёрку два раза, а в девятку – три раза.

Ответ: 3.

6. Игроки делят фишки. Первый игрок берет m фишек и шестую часть остатка; второй – $2m$ фишек и шестую часть нового остатка; третий – $3m$ фишек и шестую часть нового остатка и т.д. Оказалось, что таким образом фишки были разделены поровну. Сколько было игроков?

Решение:

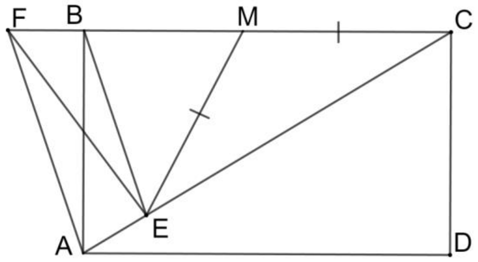
Пусть x игроков, y—количество фишек у каждого. Последний игрок взял $y=mx$ фишек, причем остатка не было, иначе не выполняется условие о равном разделе. Предпоследний игрок взял $y=(x-1)m$ и шестую часть остатка, причем $\frac{5}{6}$ остатка равно xm; значит, шестая часть остатка равна

$$\frac{xm}{5}; xm = (x-1)m + \frac{xm}{5}; 5m = xm; x = 5.$$

Ответ: 5.

7. В прямоугольнике $ABCD$ точка E расположена на диагонали ACтак, что $BC = EC$, точка M - на стороне BC так, что $EM = MC$. Найдите длину отрезка MC, если BM= 6, AE = 3. Если ответ не целый, то округлить результат до десятых по правилам округления.

Решение:

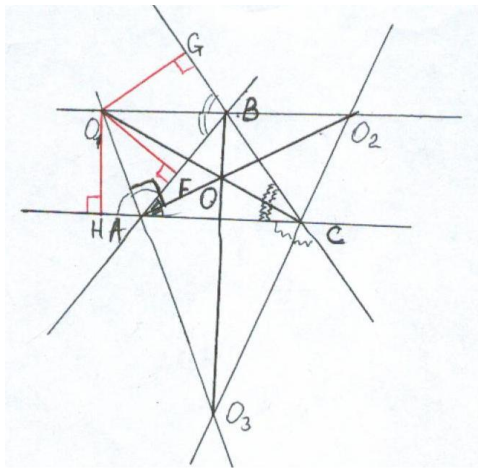


Проведем AF параллельно BE (точка F принадлежит прямой BC), тогда $\angle CBE = \angle CFA$, $\angle CEB = \angle CAF$. Учитывая, что $BC = CE$ получаем, что треугольник FCA равнобедренный, следовательно $FC = AC$ и $FB = AE$. Треугольники FBA и AEF равны, так как $FB = AE$, $\angle AFB = \angle FAE$, AF -общая. Получаем, что $\angle FBA = \angle AEF = 90^o$, откуда $\angle FEC = 90^o$. Треугольник FCE прямоугольный и $MC = ME$, а значит $FM = MC$ и $FM = FB + BM = AE + BM = MC = 9$.

Ответ: 9 см.

8. Дан треугольник ABC. $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$. Прямые O_1O_2, O_2O_3, O_1O_3 - биссектрисы внешних углов треугольника ABC, как показано на рисунке. Точка O - центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найти угол между прямыми CO_1 и O_2 O_3.

Решение:

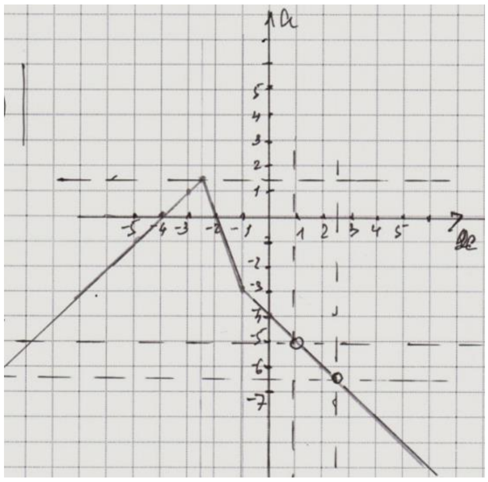


Докажем, что биссектрисы двух внешних углов и одного внутреннего пересекаются в одной точке. Пусть O_1G, O_1H, O_1F – перпендикуляры на BC, AC и AB соответственно. Тогда треугольники AHO_1 и BFO_1, BFO_1 и BGO_1 прямоугольные и равны по гипотенузе и острому углу. Из равенства треугольников следует, что $HO_1=GO_1$. Значит, O_1 равноудалена от сторон угла C, то есть CO_1 – биссектриса угла C. Аналогично доказывается, что AO_2 и BO_3 биссектрисы углов A и B. Точка O - точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Угол O_1AO_2 прямой, так как образован биссектрисами смежных углов. Аналогично прямыми являются углы O_1BO_3 и O_1CO_2, а, следовательно, О - точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$. Значит, CO_1 перпендикулярна O_2 O_3.

Ответ: 90^o.

9. При каких значениях параметра $\boldsymbol{a}$ уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение, если $f(x) = \left|\frac{2x^3-5x^2-2x+5}{(1,5x-3)^2-(0,5x-2)^2}\right|$, $p(x)$ $=|2x+5|+$ a. Если значений параметра больше одного, то в ответе укажите их сумму.

Решение:



Упростим $f(x) = \left|\frac{2x^3-5x^2-2x+5}{(1,5x-3)^2-(0,5x-2)^2}\right|$, получим
$f(x) = |x+1|$, где $x \neq 1$, $x \neq 2,5$.

Решим уравнение $|x+1| = |5+2x| + a$, где $x \neq 1$, $x \neq 2,5$ графически в системе xOa.

1) $\begin{cases} x < -2,5 \\ -x-1 = -2x-5+a \end{cases}$ $\begin{cases} x < -2,5 \\ a = x+4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -2,5 \leq x < -1 \\ -x-1 = 2x+5+a \end{cases}$ $\begin{cases} -2,5 \leq x < -1 \\ a = -3x-6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \geq -1 \\ x+1 = 2x+5+a \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ a = -x-4 \end{cases}$

Уравнение имеет одно решение при a = -6,5, a =-5, a =1,5. Сумма равна -10.

Ответ: -10.