

**Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования  
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование  
и графика) общеобразовательный предмет «Математика», осень 2019 г.**

**8 класс**

**Вариант № 1**

1. (9 баллов) Илья берёт тройку чисел и преобразует её по правилу: на каждом шаге каждое число меняется на сумму двух остальных. Чему равна разность между самым большим и самым маленьким числами в тройке на 1989-ом шаге применения этого правила, если изначальная тройка чисел была  $\{70; 61; 20\}$ ? Если вопрос задачи допускает несколько вариантов ответа, то укажите их все в виде множества.
2. (9 баллов) Две точки движутся по окружности. При движении в одном направлении более быстрая точка догоняет более медленную точку каждые 16 секунд. Если же они будут двигаться в противоположных направлениях с теми же скоростями, то будут встречаться каждые 4 секунды. Известно, что при движении по окружности навстречу друг другу расстояние между сближающимися точками уменьшается на 64 см каждые 2 секунды (до момента встречи). Найдите скорость более быстрой точки (в см/сек).
3. (9 баллов) В треугольнике  $ABC$  сторона  $BC$  равна 18 см. Перпендикуляр  $DF$ , проведенный к стороне  $AB$  через ее середину – точку  $D$ , пересекает сторону  $BC$  в точке  $F$ . Найдите периметр треугольника  $AFC$ , если сторона  $AC$  равна 9 см.
4. (9 баллов) Имеются контейнеры двух видов: по 27 кг и по 65 кг. Сколько было всего контейнеров первого и второго видов, если груз в контейнерах первого вида превышает груз контейнера второго вида на 34 кг, и количество контейнеров по 65 кг не превышает 44 штук?
5. (12 баллов) На выставке собак по жеребьевке каждой из них достался порядковый номер от 1 до 24. В связи со здоровьем одна из собак не смогла выступить на конкурсе. Оказалось, что среди 23 оставшихся одна имеет номер, равный среднему арифметическому номеров оставшихся собак. Какой порядковый номер имела собака, которая не смогла участвовать в выставке? Если задача имеет не единственное решение, то выпишите в ответ эти номера без пробела в порядке возрастания.
6. (12 баллов) Фермер представил на рынке 6 сортов сметаны в бидонах 9,13,17,19,20,38 литров. В первый день он продал сметану из трех бидонов целиком, во второй день еще из двух полностью. При этом объем проданной сметаны в первый день был вдвое больше объема проданной сметаны во второй день. Какие бидоны опустели в первый день? В ответе укажите наибольшую возможную сумму объемов проданной сметаны в первый день.
7. (12 баллов) В прямоугольнике  $ABCD$  точка  $E$  является серединой стороны  $CD$ . На стороне  $BC$  взяли точку  $F$  так, что угол  $AEF$  прямой. Найдите длину отрезка  $FC$ , если  $AF=9$ ,  $BF = 6$ .

8. (14 баллов) В треугольнике  $ABC$  с  $\angle B = 120^\circ$  проведены биссектрисы  $AA_1, BB_1, CC_1$ . Отрезок  $A_1B_1$  пересекает биссектрису  $CC_1$  в точке  $M$ . Найти  $\angle CBM$ .

9. (14 баллов) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $|f(x) - 5| = p(x)$ , если  $f(x) = \left| \frac{x^2 - 10x + 25}{x - 5} - \frac{x^2 - 3x}{3 - x} \right|$ ,  $p(x) = a$  имеет три решения. Если значений параметра больше одного, то в ответе укажите их произведение.

## Решение варианта № 1

1. Илья берёт тройку чисел и преобразует её по правилу: на каждом шаге каждое число меняется на сумму двух остальных. Чему равна разность между самым большим и самым маленьким числами в тройке на 1989-ом шаге применения этого правила, если изначальная тройка чисел была  $\{70; 61; 20\}$ ? Если вопрос задачи допускает несколько вариантов ответа, то укажите их все в виде множества.

**Решение:**

Обозначим 3 числа, как  $\{x; x+a; x+b\}$ , где  $0 < a < b$ . Тогда разность между самым большим и самым маленьким числом на любом шаге, начиная с нулевого шага, будет инвариантом, то есть неизменной и равняться  $b$ .  $b = 70 - 20 = 50$ .

**Ответ:** 50.

2. Две точки движутся по окружности. При движении в одном направлении более быстрая точка догоняет более медленную точку каждые 16 секунд. Если же они будут двигаться в противоположных направлениях с теми же скоростями, то будут встречаться каждые 4 секунды. Известно, что при движении по окружности навстречу друг другу расстояние между сближающимися точками уменьшается на 64 см каждые 2 секунды (до момента встречи). Найдите скорость более быстрой точки (в см/сек).

**Решение:**

Обозначим  $v$  – скорость более быстрой точки,  $u$  – более медленной. По условию задачи составим

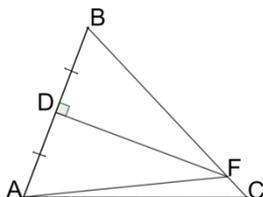
систему уравнений: 
$$\begin{cases} (u + v) \cdot 4 = (v - u) \cdot 16 \\ (u + v) \cdot 2 = 64 \end{cases}; \begin{cases} 3v = 5u \\ u + v = 32 \end{cases}; \begin{cases} u = 12 \\ v = 20 \end{cases}.$$
 Скорость более быстрой

точки 20 см/сек.

**Ответ:** 20.

3. В треугольнике  $ABC$  сторона  $BC$  равна 18 см. Перпендикуляр  $DF$ , проведенный к стороне  $AB$  через ее середину – точку  $D$ , пересекает сторону  $BC$  в точке  $F$ . Найдите периметр треугольника  $AFC$ , если сторона  $AC$  равна 9 см.

**Решение:**



Треугольник  $ABF$  ( $BF = AF$ ) равнобедренный, так как  $DF \perp AB$ ,  $D$  – середина  $AB$ .  $P_{AFC} = AF + FC + AC = BF + FC + AC = BC + AC = 27$  см.

**Ответ:** 27 см.

4. Имеются контейнеры двух видов: по 27 кг и по 65 кг. Сколько было всего контейнеров первого и второго видов, если груз в контейнерах первого вида превышает груз контейнера второго вида на 34 кг, и количество контейнеров по 65 кг не превышает 44 штук?

**Решение:**

Пусть  $x$  – количество контейнеров по 27кг,  $y$  – количество контейнеров по 65кг. Получим уравнение  $27x - 65y = 34$ .

$$27(x-2y) - 11y = 34, \text{ обозначим } x-2y = k \quad (1)$$

$$27k - 11y = 34$$

$$11(2k - y) + 5k = 34, \text{ обозначим } 2k - y = t \quad (2)$$

$$11t + 5k = 34$$

$$5(2t + k) + t = 34, \text{ обозначим } 2t + k = n \quad (3)$$

$$5n + t = 34, \quad t = 34 - 5n$$

$$\text{Подставим в (3), } k = 11n - 68$$

$$\text{Подставим в (2), } y = 27n - 170$$

$$\text{Подставим в (1), } x = 65n - 408$$

Так как  $x > 0, 0 \leq y \leq 44$ , то  $n = 7$ . Тогда соответственно  $x = 47, y = 19$ .

Получилось 47 и 19 контейнеров, всего 66 контейнеров.

**Ответ:** 66.

**5.** На выставке собак по жеребьёвке каждой из них достался порядковый номер от 1 до 24. В связи со здоровьем одна из собак не смогла выступить на конкурсе. Оказалось, что среди 23 оставшихся одна имеет номер, равный среднему арифметическому номеров оставшихся собак. Какой порядковый номер имела собака, которая не смогла участвовать в выставке? Если задача имеет не единственное решение, то выпишите в ответ эти номера без пробела в порядке возрастания.

**Решение:**

Сумма номеров по жеребьёвке, первоначально равная  $1+2+3+\dots+24=300$  и уменьшившаяся на зачёркнутое число, заключена в пределах от  $300-24=276$  до  $300-1=299$ . Она, кроме того, кратна 23, поскольку в 23 раза больше одного из слагаемых. А так, как из чисел 276, 277, 278, ..., 299 только числа 276 и 299 кратны 23, то стёрли либо число  $24=300-276$ , либо  $1=300-299$ . В обоих случаях среднее арифметическое номеров собак, оставшихся в конкурсе, не совпадает со стёртым числом.

**Ответ:** 25.

**6.** Фермер представил на рынке 6 сортов сметаны в бидонах 9, 13, 17, 19, 20, 38 литров. В первый день он продал сметану из трех бидонов целиком, во второй день еще из двух полностью. При этом объем проданной сметаны в первый день был вдвое больше объема проданной сметаны во второй день. Какие бидоны опустели в первый день? В ответе укажите наибольшую возможную сумму объемов проданной сметаны в первый день.

**Решение:**

Всего привезли 116 л;  $116 = 3 \cdot 38 + 2$ ; поэтому непроданный бидон при делении на 3 дает остаток 2.

1) если 17 л, то  $116 - 17 = 99$ , тогда во второй день продали треть от  $99 = 33$  л,  $33 = 13 + 20$ , тогда в первый день продали бидоны емкостью 9, 19, 38 л, их суммарный объем 66 л.

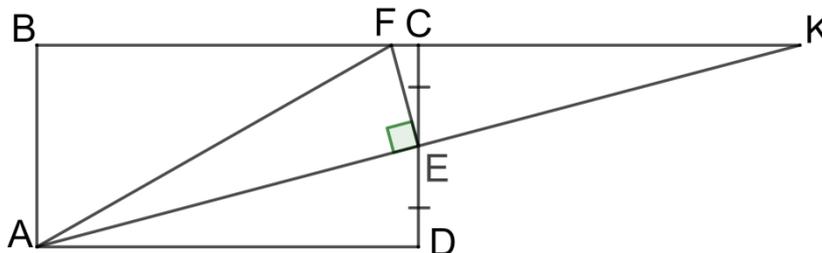
2) если 20 л, то  $116 - 20 = 96$ ; треть от 96 это  $32 = 13 + 19$ , тогда в первый день продали бидоны 9, 17, 38 л, их суммарный объем на 2 меньше предыдущего;

3) если 38 л бидон не продан, то  $116 - 38 = 78$ , две трети от 78 – это 52, 52 меньше 66.

**Ответ:** 66.

7. В прямоугольнике  $ABCD$  точка  $E$  является серединой стороны  $CD$ . На стороне  $BC$  взяли точку  $F$  так, что угол  $AEF$  прямой. Найдите длину отрезка  $FC$ , если  $AF=9$ ,  $BF=6$ .

**Решение:**



Пусть прямые  $AE$  и  $BC$  пересекаются в точке  $K$ , тогда треугольники  $AED$  и  $KCE$  равны ( $\angle AED = \angle CED$  как вертикальные,  $CE=ED$ ,  $\angle ADE = \angle KCE = 90^\circ$ ), следовательно,  $CK=AD$ ,  $AE=EK$ . Треугольник  $AFK$  равнобедренный ( $FE \perp AK$ ,  $E$  – середина  $AK$ ), а, значит,  $AF = FK = 7$ . Так как  $AD = CK$  и  $AD = BC$ , получаем  $BK = BF+FK = 2(BF+FC)$ .  
 $FC = 7,5-6=1,5$  см.

**Ответ:** 1,5 см.

8. В треугольнике  $ABC$  с  $\angle B=120^\circ$  проведены биссектрисы  $AA_1, BB_1, CC_1$ . Отрезок  $A_1B_1$  пересекает биссектрису  $CC_1$  в точке  $M$ . Найти  $\angle CBM$ .

**Решение:**

Продолжим сторону  $AB$  за точку  $B$ , тогда  $BC$  биссектриса угла  $\angle B_1BK$ , а значит точка  $A_1$  равноудалена от сторон  $B_1B$  и  $BK$ .

Учитывая, что точка  $A_1$  лежит на биссектрисе  $\angle BAC$ , а, значит, и равноудалена от его сторон. Получаем, что  $A_1$  равноудалена от сторон  $B_1B$  и  $B_1C$ , а, значит, лежит на биссектрисе  $\angle BB_1C$ .

В треугольнике  $BB_1C$   $M$  - точка пересечения биссектрис  $B_1A_1$  и  $CC_1$ , а, значит, и  $BM$  тоже биссектриса  $\angle B_1BC$ , следовательно  $\angle B_1BM = \angle MBC = 30^\circ$

**Ответ:**  $\angle CBM = 30^\circ$ .

9. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $|f(x) - 5| = p(x)$ , если  $f(x) = \left| \frac{x^2 - 10x + 25}{x - 5} - \frac{x^2 - 3x}{3 - x} \right|$ ,  $p(x) = a$  имеет три решения. Если значений параметра больше одного, то в ответе укажите их произведение.

**Решение:**

Упростим  $f(x) = \left| \frac{x^2 - 10x + 25}{x - 5} - \frac{x^2 - 3x}{3 - x} \right|$ , получим  $f(x) = |2x - 5|$ , где  $x \neq 5, x \neq 3$ .

Решим уравнение  $||2x - 5| - 5| = a$ , где  $x \neq 5, x \neq 3$  графически в системе  $xOa$ .

Уравнение имеет три решения при  $a = 4, a = 5$ .

Произведение равно 20.

**Ответ:** 20.

