Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», осень 2019 г.

11 класс

Вариант № 2

1. Сопротивление на изгиб балки прямоугольного поперечного сечения пропорционально произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты. Какова должна быть ширина сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметра $15\sqrt{3}$, чтобы ее сопротивление на изгиб было наибольшим? (5 баллов)

2. Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению $xy = 20 - 3x + y$. Для каждой найденной пары (x, y) вычислите произведение xy. В ответ запишите сумму этих произведений. (5 баллов)

3. Найдите все натуральные решения неравенства

$$\frac{4}{5} + \frac{4}{45} + \frac{4}{117} + \cdots + \frac{4}{16n^2 - 8n - 3} > n - 5.$$

В ответ запишите сумму всех найденных решений. (6 баллов)

4. Имеется неограниченный запас квадратных стекол 10 цветов. Сколькими способами можно вставить 4 стекла в оконную раму 2×2, чтобы какой-нибудь цвет встречался и в верхней и в нижней половине окна. (12 баллов)

5. Пусть $x,\ y,\ z$ – корни уравнения $t^3 - 5t - 3 = 0$. Найти $x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3$. (12 баллов)

6. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(1; 3)$, а его катеты лежат на прямых $y = x$ и $y = -x$? (12 баллов)

7. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 3$ и $BC = 1$ проведены биссектрисы AE и CF, которые пересекаются в точке O, причем $OE = OF$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AEF. Результат округлите до сотых. (16 баллов)

8. Найдите все целые значение параметра *a,* при которых система $\begin{cases} x - 2y = y^2 + 2, \\ ax - 2y = y^2 + x^2 + 0{,}25a^2. \end{cases}$

имеет хотя бы одно решение. В ответе укажите сумму найденных значений параметра a .

(16 баллов)

9. Основанием пирамиды *TABCD* является равнобедренная трапеция *ABCD*, длина меньшего основания *BC* которой равна $\sqrt{3}$. Отношение площадей частей трапеции *ABCD*, на которые ее делит средняя линия, равно $5 : 7$. Все боковые грани пирамиды *TABCD* наклонены к плоскости основания под углом $30°$. Плоскость *AKN*, где точки K и N – середины ребер *TB* и *TC* соответственно, делит пирамиду на две части. Найдите объем большей части. (16 баллов)

Решение варианта № 2

1. Сопротивление на изгиб балки прямоугольного поперечного сечения пропорционально произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты. Какова должна быть ширина сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметра $15\sqrt{3}$, чтобы ее сопротивление на изгиб было наибольшим? (5 баллов)

Решение.

$F(a)=kab^2$, a – ширина балки, b – высота балки. Поскольку $b^2=225\cdot 3-a^2$, то

$F(a)=ka(225\cdot 3-a^2)=k(225\cdot 3a-a^3)$, $F'(a)=k(225\cdot 3-3a^2)=3k(225-a^2)$.

Производная равна нулю и меняет знак с плюса на минус при $a=15$, при этом сопротивление на изгиб будет наибольшим.

Ответ: 15.

2. Найдите все пары целых чисел (x,y), удовлетворяющих уравнению $xy=20-3x+y$. Для каждой найденной пары (x,y) вычислите произведение xy. В ответ запишите сумму этих произведений. (5 баллов)

Решение. $xy=20-3x+y$, $xy=17+3(1-x)+y$, $(x-1)y+3(x-1)=17$, $(x-1)(y+3)=17$. Поскольку x и у целые, то имеем четыре случая:

1) $\begin{cases} y+3=17, \\ x-1=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=14, \\ x=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y+3=-17, \\ x-1=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-20, \\ x=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y+3=1, \\ x-1=17, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2, \\ x=18; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y+3=-1, \\ x-1=-17, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4, \\ x==16. \end{cases}$

Ответ: 56.

3. Найдите все натуральные решения неравенства

$$\frac{4}{5}+\frac{4}{45}+\frac{4}{117}+\cdots+\frac{4}{16n^2-8n-3}>n-5.$$

В ответ запишите сумму всех найденных решений. (6 баллов)

Решение. Имеем $16n^2-8n-3=(4n-3)(4n+1)$, $\dfrac{1}{4n-3}-\dfrac{1}{4n+1}=\dfrac{4}{16n^2-8n-3}$,

$$\frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}>n-5,$$

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}>n-5,\ 1-\frac{1}{4n+1}>n-5,\quad 4n^2-23n-5<0,$$

$$n\in\left(\frac{23-\sqrt{609}}{8};\frac{23-\sqrt{609}}{8}\right)\cap\mathbb{N}, 1+2+3+4+5=15.$$

Ответ: 15.

4. Имеется неограниченный запас квадратных стекол 10 цветов. Сколькими способами можно вставить 4 стекла в оконную раму 2×2, чтобы какой-нибудь цвет встречался и в верхней и в нижней половине окна. (12 баллов)

Решение. Если в верхней половине стёкла одного цвета (одного из 10), то выбрать цвета нижних стёкол можно $10^2 - 9^2 = 19$ способами. Если же верхние стёкла разные (10*9=90 способов выбрать), то выбрать цвета нижних можно $10^2 - 8^2 = 36$ способами.
Итого 10*19 + 90*36 = 190 + 3240 = 3430 способов.

Ответ: 3430.

5. Пусть $x,\ y,\ z$ – корни уравнения $t^3 - 5t - 3 = 0$. Найти $x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3$. (12 баллов)

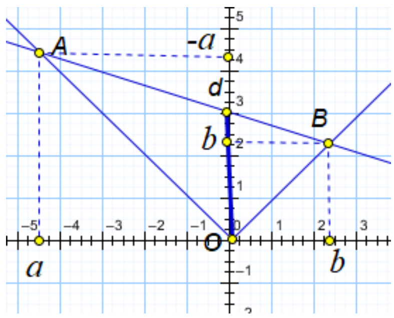
Решение. Многочлен имеет 3 разных действительных корня, т.к. P(-100)<0, P(-1)>0, P(0)<0, P(100)>0. По теореме Виета x+y+z=0, xy+xz+yz=-5, xyz=3.

$$x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3 = (5x+3)(5y+3) + (5x+3)(5z+3) + (5y+3)(5z+3)$$
$$= 25(xy + xz + yz) + 30(x + y + z) + 27 = -98$$

Ответ: -98.

6. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(1;3)$, а его катеты лежат на прямых $y = x$ и $y = -x$? (12 баллов)

Решение.



$$AB:\quad y = kx + d,\quad M \in AB \Rightarrow d = 3 - k$$

$$A(a;-a) \in AB \Rightarrow -a = ka + 3 - k \Rightarrow a = \frac{3-k}{k+1},$$

$$B(b;b) \in AB \Rightarrow b = kb + 3 - k \Rightarrow b = \frac{k-3}{k-1},$$

$$S_{ABO} = \frac{1}{2}d\cdot(b-a) == \frac{3-k}{2}\left(\frac{k-3}{k-1} - \frac{k-3}{k+1}\right) = \frac{(k-3)^2}{1-k^2},$$

$$S' = \frac{2(k-3)(1-3k)}{(k^2-1)^2} = 0,\ k_{\min} = \frac{1}{3},\quad S_{\min} = 8.$$

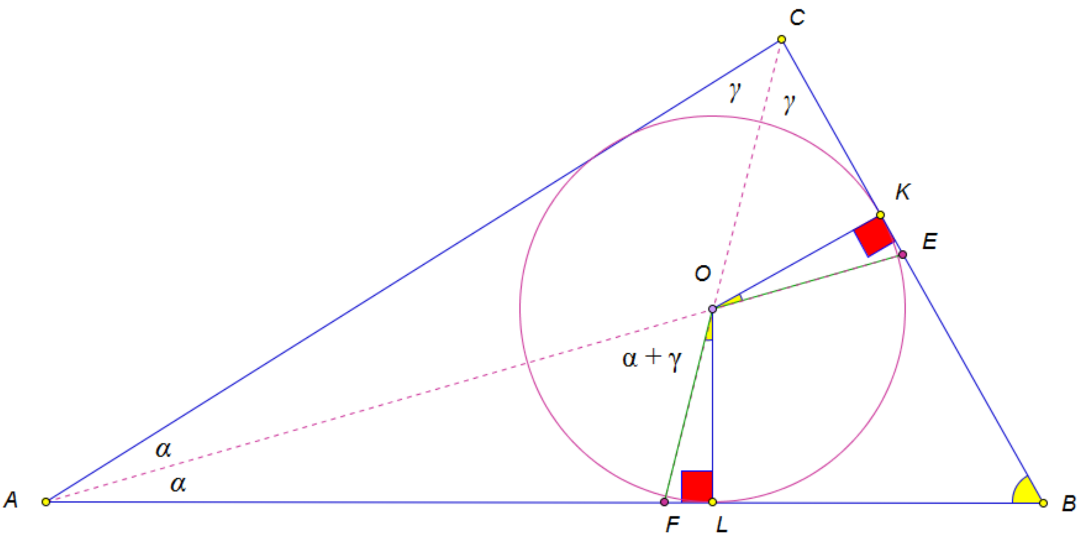
Ответ: 8.

7. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 3$ и $BC = 1$ проведены биссектрисы AE и CF, которые пересекаются в точке O, причем $OE = OF$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AEF. Результат округлите до сотых. (16 баллов)

Решение.

1. Обозначив $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 2\gamma$, вычислим величину углов $\angle AOF = \angle COE$. Эти углы являются внешними для треугольника AOC. И значит, $\angle AOF = \angle COE = \alpha + \gamma$.

2. Из точки O опустим высоты OL и OK на основания AB и BC, соответственно. При этом $OL = OK$ (радиус вписанной окружности) и $OF = OE$ (по условию). Отсюда следует, что $\angle FOL = \angle KOE$.



3. Заметим, что основание K высоты OK может оказаться как по одну, так и по другую сторону от точки E. Точно также, возможны два варианта расположения точки L по отношению к точке F. Всего получается четыре различных возможных случая. Вычислим и приравняем величины углов $\angle FOL$ и $\angle KOE$ для всех этих четырех случаев.

4. Из прямоугольного треугольника AOL имеем:

$\angle FOL = \angle AOL - \angle AOF = (\pi/2 - \alpha) - (\alpha + \gamma) = \pi/2 - 2\alpha - \gamma$, если L находится справа от F;

$\angle FOL = \angle AOF - \angle AOL = (\alpha + \gamma) - (\pi/2 - \alpha) = -\pi/2 + 2\alpha + \gamma$, если L находится слева F.

Аналогично, из прямоугольного треугольника KOE имеем:

$\angle KOE = \angle COE - \angle COK = (\alpha + \gamma) - (\pi/2 - \gamma) = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma$, если точка K находится выше точки E; и $\angle KOE = \angle COK - \angle COE = (\pi/2 - \gamma) - (\alpha + \gamma) = \pi/2 - \alpha - 2\gamma$, если точка K находится ниже точки E.

5. Приравниваем величины углов $\angle FOL$ и $\angle KOE$ для этих четырех случаев:

а) $\pi/2 - 2\alpha - \gamma = \pi/2 - \alpha - 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \angle A = \angle C$ (равнобедренный треугольник);

б) $\pi/2 - 2\alpha - \gamma = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi/3 = 60° \Rightarrow \angle B = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \pi/3 = 60°$;

в) $-\pi/2 + 2\alpha + \gamma = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \angle A = \angle C$ (равнобедренный треугольник);

г) $-\pi/2 + 2\alpha + \gamma = \pi/2 - \alpha - 2\gamma \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi/3 = 60° \Rightarrow \angle B = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \pi/3 = 60°$;

6. Учитывая, что треугольник ABC по условию не является равнобедренным, получаем $\angle B = 60°$.

7. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle B = 7,\ AC = \sqrt{7}$.

8. По свойству биссектрисы имеем: $\dfrac{BF}{AF} = \dfrac{BC}{AC},\ AF = x,\ \dfrac{3-x}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{7}},\ x = \dfrac{7-\sqrt{7}}{2}$.

9. $\angle AEF = 30°,\quad R_{onAEF} = \dfrac{AF}{2\sin 30°} = \dfrac{7-\sqrt{7}}{2} \approx 2{,}18.$

Ответ: 2,18.

8. Найдите все целые значение параметра *a,* при которых система $\begin{cases} x-2y=y^2+2, \\ ax-2y=y^2+x^2+0,25a^2. \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение. В ответе укажите сумму найденных значений параметра a .

(16 баллов)

Решение: Преобразуем систему

$$\begin{cases} x-1=(y+1)^2, \\ (y+1)^2+(x-0,5a)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=(y+1)^2, \\ x-2+(x-0,5a)^2=0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы

$$x^2+x(1-a)+(a^2-8)/4=0, \quad D=(a-1)^2-(a^2-8)=9-2a$$

Решение существует при $a \le 9/2$, $x=\dfrac{a-1\pm\sqrt{9-2a}}{2}$, причем $x \ge 1.$ Для существования решения должны выполняться условия

$$\begin{cases} D=9-2a \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(1)=\left(a^2-4a\right)/4>0 \\ \dfrac{a-1}{2}>1 \end{cases} \\ f(1)=\left(a^2-4a\right)/4 \le 0 \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \le 9/2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(a-4)>0 \\ a-1>2 \end{cases} \\ a(a-4) \le 0 \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow a \in [0,\ 9/2].$$

Суммируя целые значения параметра, получим 0+1+2+3+4=10.

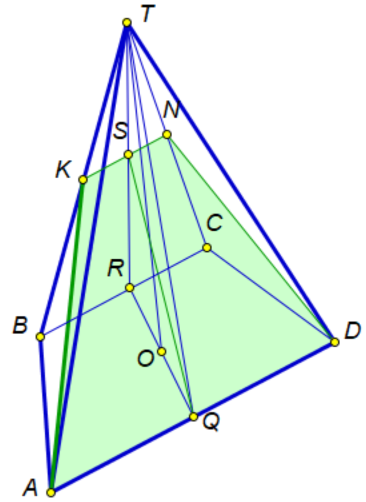
Ответ: 10.

9. Основанием пирамиды *TABCD* является равнобедренная трапеция *ABCD*, длина меньшего основания *BC* которой равна $\sqrt{3}$. Отношение площадей частей трапеции *ABCD*, на которые ее делит средняя линия, равно $5:7$. Все боковые грани пирамиды *TABCD* наклонены к плоскости основания под углом $30°$. Плоскость *AKN,* где точки *K* и *N* – середины ребер *TB* и *TC* соответственно, делит пирамиду на две части. Найдите объем большей части.

(16 баллов)

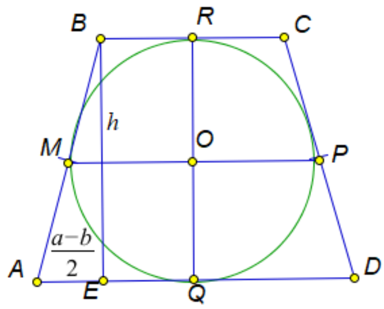
Решение.

Пусть TO – высота пирамиды. Поскольку все боковые грани наклонены к основанию под одним и тем же углом, то O – центр окружности, вписанной в основание. Пусть MP – средняя линия трапеции, $AD = a,\ BC = b = \sqrt{3}$. По условию имеем

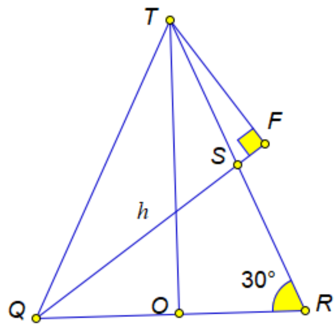


$$S_{MBCP} = 5x,\ S_{AMPD} = 7x, \qquad \frac{5}{7} = \frac{b + (a+b)/2}{a + (a+b)/2} = \frac{a + \sqrt{3}}{3a + \sqrt{3}},$$

$a = 2\sqrt{3}$. Поскольку в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, то $AB + CD = a + b,\quad AB = CD = 1{,}5\sqrt{3}$. Вычислим высоту трапеции $h = \sqrt{AB^2 - (a-b)^2/4} = \sqrt{6}$. Через точку O проведем прямую, перпендикулярную основаниям трапеции и пересекающую эти основания в точках Q и R, $OR = h$. Поскольку боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $30°$, то высота пирамиды $TO = \dfrac{1}{2} QR \operatorname{tg} 30° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Пусть TF – высота пирамиды $TAKND$, TF – перпендикуляр, опущенный из точки T на прямую QS, где S – середина KN. Вычислим объем пирамиды $TAKND$:



$V_{TAKND} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{AD + KN}{2} \cdot QS \cdot TF$. Площадь треугольника TQS можно вычислить двумя способами:

$S_{TQS} = \dfrac{QR \cdot TO}{4},\ S_{TQS} = \dfrac{QS \cdot TF}{2},\quad QS \cdot TF = \dfrac{QR \cdot TO}{2}$, и

$V_{TAKND} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{AD + KN}{2} \cdot QR \cdot TO$. Отсюда получаем $V_{TAKND} = 5/8$.

Вычислим объем пирамиды $TABCD$:

$$V_{TABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AD + BC}{2} \cdot QR \cdot TO = \frac{3}{2}.$$

$$V_{TABCD} - V_{TAKND} = \frac{3}{2} - \frac{5}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875.$$

Ответ: 0,875.