Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», осень 2019 г.

11 класс

Вариант № 1

1. Стреляя по мишени, каждым своим выстрелом спортсмен выбивал только восемь, девять или десять очков (все эти очки были выбиты не менее одного раза). Сделав более 11 выстрелов, в сумме он выбил 100 очков. Сколько 8-очковых выстрелов сделал спортсмен? (5 баллов)

2. Для любых натуральных значений m и n ($n > 1$) определена функция $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\sqrt[n]{3^m}}{\sqrt[n]{3^m}+3}$. Вычислите сумму

$f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2}{2020}\right)+f\left(\frac{3}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{4039}{2020}\right)+f\left(\frac{4040}{2020}\right)$. (5 баллов)

3. Найдите все пары действительных чисел $(x;y)$, которые удовлетворяют неравенству $\sqrt{x+y-1}+x^4+y^4-\frac{1}{8}\leq 0$. В ответ запишите наибольшее значение произведения xy для всех найденных пар $(x;y)$. (6 баллов)

4. Сколькими способами можно переставить буквы ОЛИМПИАДА так, чтобы не было идущих подряд в таком порядке букв ЛАМПА (тождественная перестановка тоже считается)? (12 баллов)

5. Последовательность Фибоначчи задана рекуррентно: $a_1=a_2=1$,

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ при всех натуральных n. Какой цифрой оканчивается a_{2020}? (12 баллов)

6. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(1;0)$, а его катеты лежат на прямых $y=-2$ и $x=0$? (12 баллов)

7. В треугольнике ABC со стороной $AB=3$ проведены биссектрисы AE и CF, которые пересекаются в точке O, причем $OE=OF$. Найдите длину отрезка EF, если площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{3}$, и $AB\neq BC$. Результат округлите до десятых. (16 баллов)

8. Укажите наибольшее значение параметра a, при котором существует единственное решение системы

$$\begin{cases} y=1-\sqrt{x}, \\ a-2(a-y)^2=\sqrt{x}. \end{cases}$$ (16 баллов)

9. Основанием пирамиды $TABCD$ является трапеция $ABCD$, длина меньшего основания BC которой равна $4\sqrt{11}$. Диагонали трапеции AC и BD пересекаются в точке O, отношение площадей треугольников AOB и BOC равно $3:2$, площадь треугольника DOC равна $132\sqrt{2/25}$. Все боковые ребра пирамиды $TABCD$ наклонены к плоскости основания под углом $30°$. Найдите объем пирамиды $TBMNC$, где точки M и N – середины ребер TA и TD соответственно. (16 баллов)

Решение варианта № 1

1. Стреляя по мишени, каждым своим выстрелом спортсмен выбивал только восемь, девять или десять очков (все эти очки были выбиты не менее одного раза). Сделав более 11 выстрелов, в сумме он выбил 100 очков. Сколько 8-очковых выстрелов сделал спортсмен? (5 баллов)

Решение. $8x+9y+10z=100,\ x,y,z\in\mathbb{N} \Rightarrow \ 8(x+y+z)<100$

$$\Rightarrow \ 11<x+y+z<\frac{100}{8}=12{,}5 \ \Rightarrow x+y+z=12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ 8x+9y+10z=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ 96+y+2z=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ y+2z=4 \end{cases} \Rightarrow y=2,\ z=1,\ x=9.$$

Ответ: 9.

2. Для любых натуральных значений m и n ($n>1$) определена функция $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\sqrt[n]{3^m}}{\sqrt[n]{3^m}+3}$. Вычислите сумму

$f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2}{2020}\right)+f\left(\frac{3}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{4039}{2020}\right)+f\left(\frac{4040}{2020}\right).$ (5 баллов)

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{3^x}{3^x+3}$. Имеем

$$f(x)+f(2-x)=\frac{3^x}{3^x+3}+\frac{3^{2-x}}{3^{2-x}+3}=\frac{3^x}{3^x+3}+\frac{9}{9+3\cdot 3^x}=\frac{3^x}{3^x+3}+\frac{3}{3+3^x}=1$$

Тогда $f\left(\dfrac{1}{2020}\right)+f\left(\dfrac{4039}{2020}\right)=f\left(\dfrac{2}{2020}\right)+f\left(\dfrac{4038}{2020}\right)=\cdots=f\left(\dfrac{2019}{2020}\right)+f\left(\dfrac{2021}{2020}\right)=1$

$$f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2}{2020}\right)+f\left(\frac{3}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{4039}{2020}\right)+f\left(\frac{4040}{2020}\right)=$$
$$=2019+f(1)+f(2)=2019+0{,}5+0{,}75=2020{,}25.$$

Ответ: 2020,25.

3. Найдите все пары действительных чисел $(x;y)$, которые удовлетворяют неравенству $\sqrt{x+y-1}+x^4+y^4-\frac{1}{8}\le 0$. В ответ запишите наибольшее значение произведения xy для всех найденных пар $(x;y)$. (6 баллов)

Решение. ОДЗ: $x+y\ge 1$. Докажем справедливость неравенства $x^4+y^4\ge 1/8$ при этом условии. Для любых x и y справедливо неравенство

$$(x+y)^2\ge 4xy \quad \Rightarrow \quad \frac{(x+y)^2}{2}\ge 2xy.$$

Тогда $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy\ge\dfrac{(x+y)^2}{2}\ge\dfrac{1}{2},\quad x^4+y^4\ge\dfrac{(x^2+y^2)^2}{2}\ge\dfrac{1}{8}.$

Исходное неравенство в условии задачи выполняется при условии

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x^4+y^4=1/8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1-2xy, \\ \left(x^2+y^2\right)^2-2(xy)^2=1/8, \end{cases} \Rightarrow (1-2xy)^2-2(xy)^2=1/8, \quad t=xy,$$

$$(1-2t)^2-2t^2=1/8, \quad 2t^2-4t+7/8=0, \quad t=7/4, t=1/4.$$

1) $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=7/4, \end{cases}$ нет решений. 2) $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=1/4, \end{cases} \begin{cases} x=1/2, \\ y=1/2, \end{cases} \Rightarrow xy=0,25.$

Ответ: 0,25.

4. Сколькими способами можно переставить буквы ОЛИМПИАДА так, чтобы не было идущих подряд в таком порядке букв ЛАМПА (тождественная перестановка тоже считается)? (12 баллов)

Решение. Среди данных 9 букв две пары одинаковых, поэтому число перестановок $\frac{9!}{2!2!}=90720$. Фрагмент слова «ЛАМПА» может начинаться с 1-го, 2-го, 3-го, 4-го или 5-го места, а остальные 4 буквы (Д, И, И, О) можно расставить на остальных местах $\frac{4!}{2!}=12$ способами. Так что число недопустимых перестановок 5*12=60.

Ответ: 90660.

5. Последовательность Фибоначчи задана рекуррентно: $a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ при всех натуральных n. Какой цифрой оканчивается a_{2020}? (12 баллов)

Решение. Индукцией доказывается, что

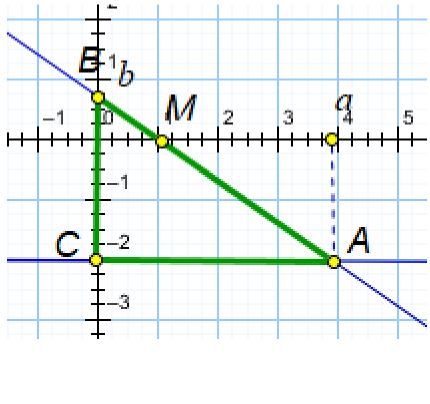
1) четность чисел чередуется так: ННЧННЧННЧ…
2) число с номером, кратным 5, делится на 5.

Поскольку 2020 делится на 5, а на 3 делится с остатком 1, число a_{2020} нечетно и кратно 5.

Ответ: 5.

6. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(1;0)$, а его катеты лежат на прямых $y=-2$ и $x=0$? (12 баллов)

Решение. $AB: \quad y=kx+b, \quad M\in AB \Rightarrow b=-k$



$$A(a;-2)\in AB \Rightarrow -2=ka+b \Rightarrow a=1-\frac{2}{k}.$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot CA=\frac{1}{2}(b+2)a=\frac{1}{2}(2-k)(1-2/k),$$

$$S'=\frac{(2-k)(2+k)}{2k^2}=0, k_{\min}=-2, \quad S_{\min}=4.$$

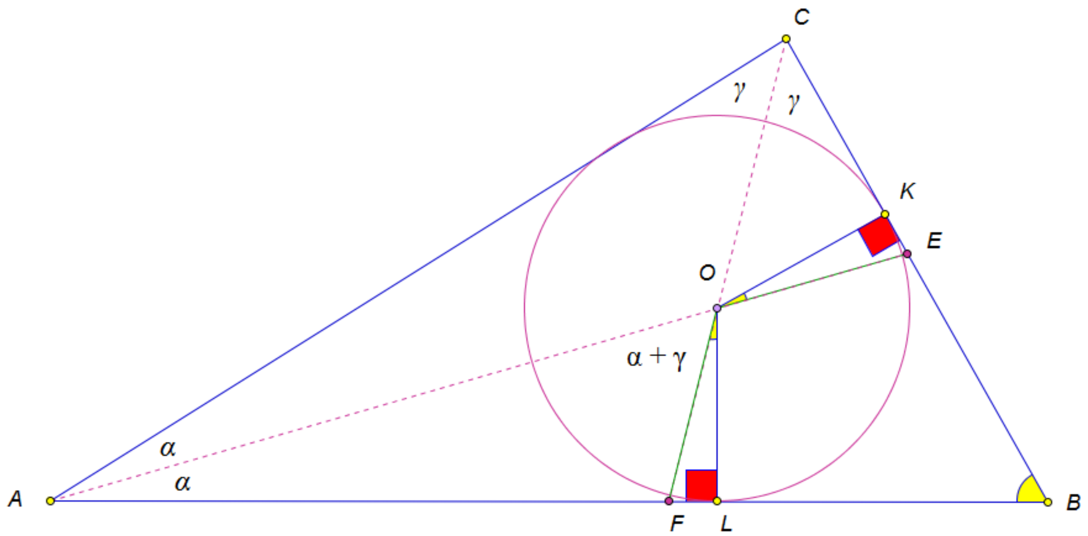
Ответ: 4.

7. В треугольнике ABC со стороной $AB = 3$ проведены биссектрисы AE и CF, которые пересекаются в точке O, причем $OE = OF$. Найдите длину отрезка EF, если площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{3}$, и $AB \neq BC$. Результат округлите до десятых. (16 баллов)

Решение.

1. Обозначив $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 2\gamma$, вычислим величину углов $\angle AOF = \angle COE$. Эти углы являются внешними для треугольника AOC. И значит, $\angle AOF = \angle COE = \alpha + \gamma$.

2. Из точки O опустим высоты OL и OK на основания AB и BC, соответственно. При этом $OL = OK$ (радиус вписанной окружности) и $OF = OE$ (по условию). Отсюда следует, что $\angle FOL = \angle KOE$.



3. Заметим, что основание K высоты OK может оказаться как по одну, так и по другую сторону от точки E. Точно также, возможны два варианта расположения точки L по отношению к точке F. Всего получается четыре различных возможных случая. Вычислим и приравняем величины углов $\angle FOL$ и $\angle KOE$ для всех этих четырех случаев.

4. Из прямоугольного треугольника AOL имеем: $\angle FOL = \angle AOL - \angle AOF = (\pi/2 - \alpha) - (\alpha + \gamma) = \pi/2 - 2\alpha - \gamma$, если L находится справа от F; $\angle FOL = \angle AOF - \angle AOL = (\alpha + \gamma) - (\pi/2 - \alpha) = -\pi/2 + 2\alpha + \gamma$, если L находится слева F. Аналогично, из прямоугольного треугольника KOE имеем:

$\angle KOE = \angle COE - \angle COK = (\alpha + \gamma) - (\pi/2 - \gamma) = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma$, если точка K находится выше точки E; и $\angle KOE = \angle COK - \angle COE = (\pi/2 - \gamma) - (\alpha + \gamma) = \pi/2 - \alpha - 2\gamma$, если точка K находится ниже точки E.

5. Приравниваем величины углов $\angle FOL$ и $\angle KOE$ для этих четырех случаев:

а) $\pi/2 - 2\alpha - \gamma = \pi/2 - \alpha - 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \angle A = \angle C$ (равнобедренный треугольник);

б) $\pi/2 - 2\alpha - \gamma = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi/3 = 60° \Rightarrow \angle B = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \pi/3 = 60°$;

в) $-\pi/2 + 2\alpha + \gamma = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \angle A = \angle C$ (равнобедренный треугольник);

г) $-\pi/2 + 2\alpha + \gamma = \pi/2 - \alpha - 2\gamma \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi/3 = 60° \Rightarrow \angle B = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \pi/3 = 60°$;

6. Учитывая, что треугольник ABC по условию не является равнобедренным, получаем $\angle B = 60°$.

7. Находим BC: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \sin\angle B,\ BC = \dfrac{2S_{ABC}}{AB\sin 60°} = 4.$

8. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\angle B = 13,\ AC = \sqrt{13}.$

9. По свойству биссектрисы имеем:

$$\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC},\ BE = x,\ \frac{x}{4-x} = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC},\ BF = y,\ \frac{y}{3-y} = \frac{4}{\sqrt{13}},$$

$$x = 3(\sqrt{13}-3),\ y = 4(4-\sqrt{13}).$$

10. По теореме косинусов находим

$$EF = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^\circ = 9(\sqrt{13}-3)^2 + 16(4-\sqrt{13})^2 - 12(\sqrt{13}-3)(4-\sqrt{13})} \approx 1{,}7.$$

Ответ: 1,7.

8. Укажите наибольшее значение параметра *a,* при котором существует единственное решение системы

$$\begin{cases} y = 1-\sqrt{x}, \\ a - 2(a-y)^2 = \sqrt{x}. \end{cases}$$

(16 баллов)

Решение:

Из первого уравнения системы $\begin{cases} y = 1-\sqrt{x} \\ a - 2(a-y)^2 = \sqrt{x} \end{cases}$ выразим $\sqrt{x}$ и подставим во второе уравнение: $\begin{cases} \sqrt{x} = 1-y \\ a - 2(a-y)^2 = 1-y \end{cases}$, учитывая, что $1-y \ge 0,$ решим полученное квадратное уравнение:

$$a - 2(a-y)^2 = 1-y \quad \Rightarrow \quad 2y^2 - y(4a+1) + 2a^2 - a + 1 = 0\ .$$

$$y_{1,2} = \frac{(4a+1) \pm \sqrt{(4a+1)^2 - 8(2a^2 - a + 1)}}{4} = \frac{4a+1 \pm \sqrt{16a-7}}{4}$$

Для существования одного решения уравнения, а значит, и исходной системы, надо либо чтобы дискриминант был равен нулю и при этом корень был не больше единицы, либо из двух корней один удовлетворяет условию, второй нет.

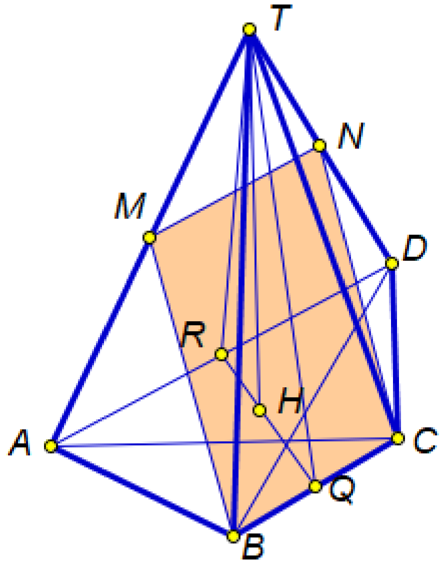
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D = 16a - 7 = 0 \\ \dfrac{4a+1}{4} \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} D = 16a - 7 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(1) = 2 - (4a+1) + 2a^2 - a + 1 < 0 \\ \begin{cases} f(1) = 2 - (4a+1) + 2a^2 - a + 1 = 0 \\ \dfrac{4a+1}{4} > 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 7/16 \\ \begin{cases} a > 7/16 \\ \left[\begin{array}{l} (a-2)(a-0{,}5) < 0 \\ \begin{cases} (a-2)(a-0{,}5) = 0 \\ a > 0{,}75 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 7/16 \\ 0{,}5 < a < 2 \\ a = 2 \end{array}\right.$$

Следовательно, наибольшее значение параметра, при котором существует единственное решение системы $a = 2$.

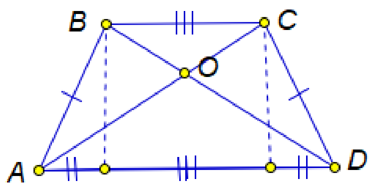
Ответ: 2.

9. Основанием пирамиды *TABCD* является трапеция *ABCD*, длина меньшего основания *BC* которой равна $4\sqrt{11}$. Диагонали трапеции *AC* и *BD* пересекаются в точке *O*, отношение площадей треугольников *AOB* и *BOC* равно $3:2$, площадь треугольника *DOC* равна $132\sqrt{2/25}$. Все боковые ребра пирамиды *TABCD* наклонены к плоскости основания под углом $30°$. Найдите объем пирамиды *TBMNC*, где точки *M* и *N* – середины ребер *TA* и *TD* соответственно. (16 баллов)

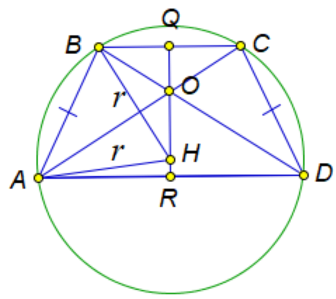
Решение.



Пусть *TH* – высота пирамиды. Поскольку все боковые ребра наклонены к основанию под одним и тем же углом, то *H* – центр окружности, описанной около основания. Отсюда следует, что трапеция равнобокая. Из условия следует, что $\dfrac{S_{AOB}}{S_{BOC}}=\dfrac{3}{2}=\dfrac{AO}{OC}$. Треугольники *AOD* и *COB* подобны, и $\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{3}{2}=\dfrac{AO}{OC}$, $AD=\dfrac{3BC}{2}=6\sqrt{11}$. Поскольку $\dfrac{OD}{BO}=\dfrac{3}{2}=\dfrac{S_{DOC}}{S_{BOC}}$, $S_{BOC}=\dfrac{2S_{DOC}}{3}=\dfrac{88\sqrt{2}}{5}$. Обозначим h_1 и h_2 высоты треугольников *BOC* и *AOD*, проведенные к основаниям *BC* и *AD* соответственно. Тогда



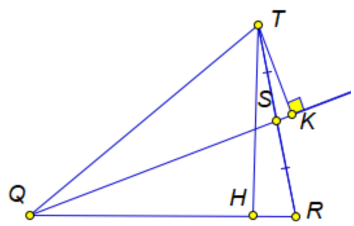
$h_1=\dfrac{2S_{BOC}}{BC}=\dfrac{4\sqrt{22}}{5}$, $h_2=\dfrac{3h_1}{2}=\dfrac{6\sqrt{22}}{5}$. Высота трапеции $h=h_1+h_2=2\sqrt{22}$. Находим боковые стороны трапеции $AB=CD=3\sqrt{11}$. Пусть *Q* и *R* – середины сторон *BC* и *AD* соответственно. Обозначим $HR=x$, радиус описанной окружности *r*. Тогда $r^2=BQ^2+QH^2=44+(2\sqrt{22}-x)^2$, и



$r^2=AR^2+HR^2=99+x^2$. Отсюда находим $HR=\dfrac{3\sqrt{22}}{8}$,

$QH=\dfrac{13\sqrt{22}}{8}$, $r=\dfrac{33\sqrt{6}}{8}$. Высоту пирамиды *TH* найдем из прямоугольного треугольника *TAH* с углом $\angle TAH=30°$, $AH=r$.

Имеем $TH=r\,\mathrm{tg}\,30°=\dfrac{33\sqrt{2}}{8}$.



Пусть *TK* – высота пирамиды *TBMNC*, *TK* – перпендикуляр, опущенный из точки *T* на прямую *QS*, где *S* – середина *MN*. Вычислим объем пирамиды *TBMNC*:

$V_{TBMNC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{MN+BC}{2}\cdot QS\cdot TK$. Площадь треугольника *TQS* можно вычислить двумя способами: $S_{TQS} = \frac{QR \cdot TH}{4}$, $S_{TQS} = \frac{QS \cdot TK}{2}$, $QS \cdot TK = \frac{QR \cdot TH}{2}$, и

$V_{TBMNC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{MN + BC}{2} \cdot QR \cdot TH$.

Отсюда получаем $V_{TBMNC} = 105{,}875$.

Ответ: 105,875.