Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

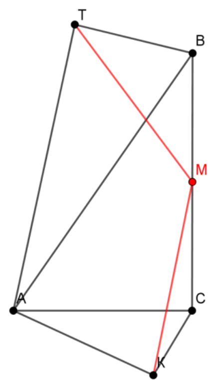
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», осень 2019 г.

10 класс

Вариант № 2

1. *(9 баллов)* Иван Иванович подошёл к источнику с двумя пустыми канистрами; одна вмещала 10 л, а другая – 8 л. Вода из источника текла двумя струями – одна сильнее, другая слабее. Иван Иванович одновременно подставил канистры под струи и, когда набралась половина меньшей канистры, поменял канистры местами. К удивлению Ивана Ивановича, канистры наполнились одновременно. Во сколько раз больше воды даёт более сильная струя, чем более слабая?

2. *(9 баллов)* На сторонах AB и AC прямоугольного треугольника ABC$\left(\angle BCA = 90^0\right)$, внешним образом построены прямоугольные треугольники ABT и ACK, так что $\angle ATB = \angle AKC = 90^0$, $\angle ABT = \angle ACK = 60^0$, на стороне BC выбрана точка M так, что BM=MC. Определите градусную меру угла KMT.

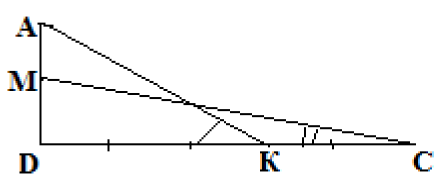


3. *(9 баллов)* В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = 1$, $d = 4$.

Вычислите $A = \dfrac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{a_{1579}} + \sqrt{a_{1580}}}$.

В ответ запишите наименьшее целое число, большее A.

4. *(9 баллов)* Прямоугольные треугольники $\triangle MDC$ и $\triangle ADK$ имеют общий прямой угол $\angle D$. Точка K принадлежит CD и делит ее в отношении 2:3 считая от точки C .Точка M середина стороны AD. Найти сумму $\angle AKD$ и $\angle MCD$, если $AD : CD = 2 : 5$.



5. *(12 баллов)* В первом сплаве меди и свинца отношение их масс 1:3; во втором сплаве 1:2. Сколько граммов первого сплава надо взять, чтобы получить 10 г нового сплава с отношением масс меди и свинца 3:7?

6. *(12 баллов)* Для всех неотрицательных значений вещественной переменной x функции $f(x)$ выполняется условие $f(x+1)+1=f(x)+\frac{20}{(x+1)(x+2)}$. Вычислите $\frac{2019}{f(2019)}$, если $f(0)=2019$.

7. *(12 баллов)* Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 65 клеток (65x65 – всего в квадрате 4225 клеток), чтобы из любой незакрашенной его клетки нельзя было попасть ходом шахматного коня в другую незакрашенную.

8. *(14 баллов)* Найдите сумму всех целых значений h, при которых уравнение ||r+h|-r|-4r=9|r-3| относительно r имеет не более одного корня.

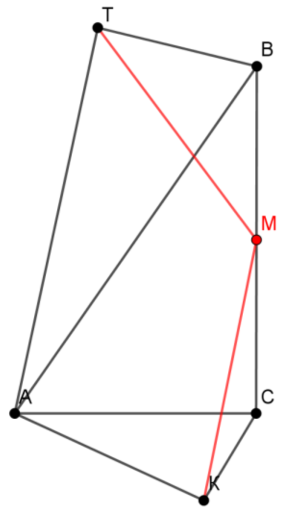
9. *(14 баллов)* Таблица, состоящая из 1861 строк и 1861 столбцов заполнена натуральными числами от 1 до 1861 так, что в каждой строке присутствуют все числа от 1 до 1861. Найдите сумму чисел, стоящих на диагонали, которая соединяет левый верхний и правый нижний углы таблицы, если заполнение таблицы симметрично относительно этой диагонали.

Решение варианта № 2

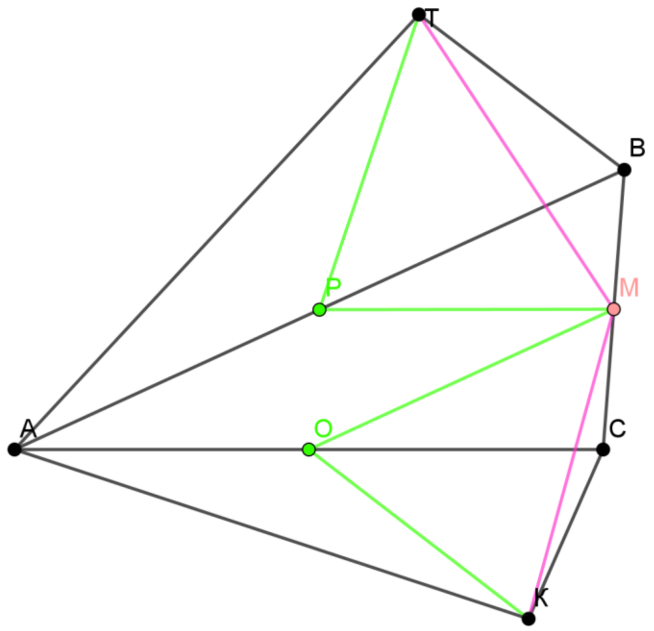
1. Иван Иванович подошёл к источнику с двумя пустыми канистрами; одна вмещала 10 л, а другая – 8 л. Вода из источника текла двумя струями – одна сильнее, другая слабее. Иван Иванович одновременно подставил канистры под струи и, когда набралась половина меньшей канистры, поменял канистры местами. К удивлению Ивана Ивановича, канистры наполнились одновременно. Во сколько раз больше воды даёт более сильная струя, чем более слабая?

Решение: Пусть в большую канистру налилось x л воды, пока в меньшую 4 л. После перестановки в большую налилось (10 – x) л, пока в меньшую снова 4 л. Так как мощности струй постоянны, отношения объёмов воды, налившейся за одно и то же время, тоже постоянно. Составим уравнение: $\frac{4}{x}=\frac{10-x}{4}$; $x^2-10x+16=0$, которое имеет два корня $x_1=2, x_2=8.$ Два корня уравнения соответствуют двум возможностям: подставить сначала меньшую канистру под более мощную или под более слабую струю. Но в обоих случаях ответ получается один и тот же: одна струя даёт в 2 раза больше воды, чем другая.
Ответ: 2.

2. На сторонах AB и AC прямоугольного треугольника ABC$\left(\angle BCA=90^0\right)$, внешним образом построены прямоугольные треугольники ABT и ACK, так что $\angle ATB=\angle AKC=90^0$, $\angle ABT=\angle ACK=60^0$, на стороне BC выбрана точка M так, что BM=MC. Определите градусную меру угла KMT.



Решение. На серединах сторон АВ и АС отметим точки Р и О соответственно. Соединим Р с М и Т, а О с К и М.



1) $\blacktriangle TPM = \blacktriangle KOM$, по двум сторонам и углу между ними, так как АО= b\2=КО=РМ; АР=с\2=ТР=ОМ; $\angle TPM = \angle TPB + \angle BPM = \angle COK + \angle COM = \angle KOM$, значит ТМ=МК, и $\angle PMT = \angle MKO = \alpha$, $\angle PTM = \angle KMO = \beta$,

2) Найдём сумму углов $\angle PMT$ и $\angle KMO$, $\angle PMT + \angle KMO = \angle MKO + \angle KMO = 180^0 - \angle MOK$. В свою очередь $\angle MOK = \angle KOC + \angle MOC = 60^0 + \angle BAC$.

3) $\angle KMT = \angle PMO + (\angle PMT + \angle KMO) = \angle BAC + (180^0 - \angle MOK) \Rightarrow$

$\angle KMT = \angle BAC + 180^0 - 60^0 - \angle BAC = 120^0$.

Ответ: 120.

3. В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = 1$, $d = 4$.

Вычислите $A = \dfrac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{a_{1579}} + \sqrt{a_{1580}}}$.

В ответ запишите наименьшее целое число, большее A.

Решение: Преобразуем выражение, домножив числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$A = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{1579}} + \sqrt{a_{1580}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \ldots + \frac{\sqrt{a_{1580}} - \sqrt{a_{1579}}}{a_{1580} - a_{1579}} =$$

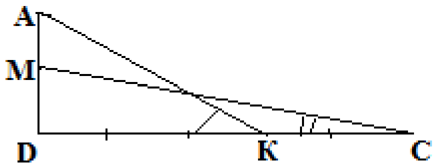
$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d}+\ldots+\frac{\sqrt{a_{1580}}-\sqrt{a_{1579}}}{d}=$$

$$=\frac{\sqrt{a_{1580}}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{\sqrt{a_1+1579d}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{\sqrt{1+1579\cdot 4}-\sqrt{1}}{4}=\frac{\sqrt{6317}-1}{4}$$

Оцениваем значение A: $19<\frac{\sqrt{6317}-1}{4}<20$, в ответ записываем наименьшее целое число, большее A.

Ответ: 20.

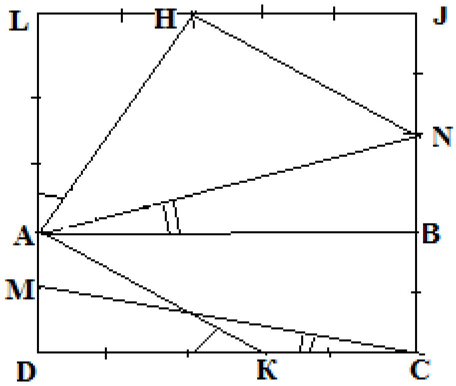
4. Прямоугольные треугольники $\triangle MDC$ и $\triangle ADK$ имеют общий прямой угол $\angle D$. Точка K принадлежит CD и делит ее в отношении 2:3 считая от точки C. Точка M середина стороны AD. Найти сумму $\angle AKD$ и $\angle MCD$, если $AD:CD=2:5$.



Решение

Достроим $\triangle ADC$ до квадрата $LJCD$. Выберем точку H на стороне LJ, такую что $LH:HJ=2:3$, точку N на стороне CJ, такую что $CN:NJ=3:2$ и точку B на стороне CJ, такую что $CB:BJ=2:3$. Тогда $\triangle AHN$ прямоугольный и равнобедренный с $\angle A=45^0$, $\angle LAH=\angle AKD$, $\angle NAB=\angle MCD$. $\angle LAB=\angle LAH+\angle HAN+\angle NAB=90^0$.

Откуда $\angle LAH+\angle NAB=\angle AKD+\angle MCD=45^0$.



Ответ: 45.

5. В первом сплаве меди и свинца отношение их масс 1:3; во втором сплаве 1:2. Сколько граммов первого сплава надо взять, чтобы получить 10 г нового сплава с отношением масс меди и свинца 3:7?

Решение. Пусть в первом сплаве x г меди и 3x г свинца. Во втором сплаве y г меди и 2y г свинца. Тогда $k\cdot 4x+n\cdot 3y=10;\frac{kx+n\cdot y}{k\cdot 3x+n\cdot 2y}=\frac{3}{7}$; найти нужно $k\cdot 4x$ и $3ny$. Обозначим

$ny = b; kx = a$. $\frac{a+b}{3a+2b} = \frac{3}{7}$. $7a + 7b = 9a + 6b; b = 2a$ Используем первое уравнение: $4a + 6a = 10; a = 1; b = 2$ Значит, $k \cdot 4x = 4; 3ny = 6$

Ответ: 4.

6. Для всех неотрицательных значений вещественной переменной x функции $f(x)$ выполняется условие $f(x+1) + 1 = f(x) + \frac{20}{(x+1)(x+2)}$. Вычислите $\frac{2019}{f(2019)}$, если $f(0) = 2019$.

Решение.

Заметим, что

$f(x+2019) - f(x) = \left(f(x+2019) - f(x+2018)\right) + \left(f(x+2018) - f(x+2017)\right) + \cdots + \left(f(x+1) - f(x)\right) = \frac{20}{(x+2019)(x+2020)} - 1 + \frac{20}{(x+2018)(x+2019)} - 1 + \cdots + \frac{20}{(x+1)(x+2)} - 1$. Таким образом, $f(2019) - f(0) = 20\left(\frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} + \ldots + 1 - \frac{1}{2}\right) - 2019 = 20\left(1 - \frac{1}{2020}\right) - 2019$. Следовательно, $\frac{2019}{f(2019)} = \frac{2020}{20} = 101$.

Ответ: 101.

7. Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 65 клеток (65x65 – всего в квадрате 4225 клеток), чтобы из любой незакрашенной его клетки нельзя было попасть ходом шахматного коня в другую незакрашенную.

Решение

Закрашивать надо в шахматном порядке. Таким образом, будет закрашено $[\frac{N^2}{2}]$ клеток. Так как любой «ход коня» приходится на клетку другого цвета, то на клетку такого же цвета хода нет. «Ходом коня» можно обойти любую квадратную таблицу (большую 4x4) так, чтобы конь побывал на каждой ее клетки ровно один раз (см., табл. 5x5). Если пронумеровать эти ходы, то очевидно, что меньше $[\frac{N^2}{2}]$ клеток окрасить нельзя потому, что тогда в этой последовательности обязательно найдутся две подряд неокрашенные, т.е. будет возможен ход с одной из них на другую. Таблицу 35x35 нужно разбить на 169 таблиц 5x5, а нумеровать поочередно, начиная с первой таблицы 5x5. $\left[\frac{65^2}{2}\right] = 2112$.

21	16	5	10	23	
6	11	22	17	4	
1	20	15	24	9	26
12	7	18	3	14	
19	2	13	8	25	

Ответ: 2112.

8. Найдите сумму всех целых значений h, при которых уравнение ||r+h|-r|-4r=9|r-3| относительно r имеет не более одного корня.

Решение

Рассмотрим функцию $f(r)= 9|r-3|-||r+h|-r|+4r$. Коэффициент при первом модуле по модулю больше суммы остальных коэффициентов при r. $9>1+1+4$. Отсюда следует, что на всех интервалах до $r=3$ коэффициент линейного приращения отрицателен, а после $r=3$ - положителен. $r=3$ - точка минимума. Для того, чтобы уравнение $f(r)=0$ имело не более одного корня необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$f(3) \geq 0$

$\Rightarrow$ Возьмём $|h+3|=t$; $12-|t-3| \geq 0$

$(t-3)^2-12^2 \leq 0$

$(t-15)(t+9) \leq 0$

$t \in [-9;15]$

$|h+3| \leq 15$

Ответ: -93.

9. Таблица, состоящая из 1861 строк и 1861 столбцов заполнена натуральными числами от 1 до 1861 так, что в каждой строке присутствуют все числа от 1 до 1861. Найдите сумму чисел, стоящих на диагонали, которая соединяет левый верхний и правый нижний углы таблицы, если заполнение таблицы симметрично относительно этой диагонали.

Решение:

Покажем, что на диагонали присутствуют все числа от 1 до 1861. Пусть число $a \in \{1,2,3...,1861\}$ не стоит на диагонали. Тогда в силу симметрии таблицы, число a встречается чётное количество раз. С другой стороны, так как число a по одному разу встречается в каждой строке, всего в таблице чисел a нечётное количество (1861). Получили противоречие.

Всего на диагонали 1861 клетки, поэтому каждое число из множества $\{1,2,...1861\}$ встретится на диагонали ровно по одному разу. Вычисляя сумму арифметической прогрессии, находим ответ.

Ответ: 1732591.