Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

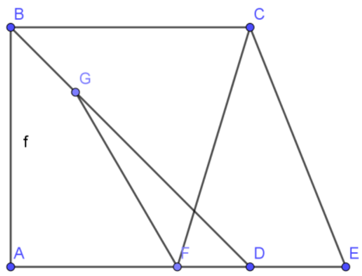
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», осень 2019 г.

10 класс

Вариант № 1

1. *(9 баллов)* Волк увидел косулю в нескольких метрах от себя и погнался за ней по прямой лесной тропе. Прыжок волка на 22% короче прыжка косули. Оба животных прыгают с постоянной скоростью. Все прыжки косули имеют одинаковую длину, прыжки волка тоже равны между собой. Существует промежуток времени, за который и волк и косуля делают по некоторому целому числу прыжков. При этом каждый раз оказывается, что волк сделал на t% прыжков больше, чем косуля. Найдите наибольшее целое значение t, при котором волк не сможет догнать косулю.

2. *(9 баллов)* Дана прямоугольная трапеция ABCE, основания которой (BC меньше AE) равны 3 и 4. Меньшая боковая сторона AB=BC. На AE отмечена точка D, так что AD: DE=3:1; на AD отмечена точка F, так что AF: FD =2:1; на BD отмечена точка G, так что BG: GD=1:2. Определите градусную меру угла CFG.



3. *(9 баллов)* В арифметической прогрессии (a_n) $a_{1000}=75,\ d=0,25$.

$$\text{Вычислить: } 99\cdot100\cdot\left(\frac{1}{a_{1580}\cdot a_{1581}}+\frac{1}{a_{1581}\cdot a_{1582}}+\ldots+\frac{1}{a_{2019}\cdot a_{2020}}\right).$$

4. *(9 баллов)* В $\triangle ABC$ с $\angle B=120^0$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 .

Отрезок A_1B_1 пересекает биссектрису CC_1 в точке М. Найти угол ΔB_1C_1M .

5. *(12 баллов)* У двух племен один шаман. Одно племя живет в долине реки, другое - на холме, на склоне горы. В связи с распространением интернета и слухов, шаману пришлось снизить цены на свои услуги. Для племени, живущего в долине, на 10 % «в мехах» и на 15 % « в рыбе». Соотношение цен меха и рыбы на местном рынке постоянно. Для племени на холме цена « в мехах» снизилась на 20%. На сколько процентов снизилась цена услуг «в рыбе» для этого племени? Ответ округлите до десятых после запятой.

6. *(12 баллов)* Какое наименьшее значение может принимать функция $F(x;y) = 6y + 8x - 9$, при условии, что $x^2 + y^2 + 25 = 10(x + \mathrm{y})$.

7. *(12 баллов)* Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 65 клеток (65х65 – всего в квадрате 4225 клеток), чтобы среди любых четырех его клеток, образующих уголок (фигуру «Г»), обязательно была хотя бы одна закрашенная.

8. *(14 баллов)* Найдите сумму всех целых значений с, при которых уравнение \10|p-3|+|2p-|p+c||=6p относительно p имеет хотя бы один корень.

9. *(14 баллов)* Известно, что количество берёз на некоторой делянке смешенного леса составляет от 13% до 14% общего количества деревьев. Найдите минимально возможное общее количество деревьев на этой делянке.

Решение варианта № 1

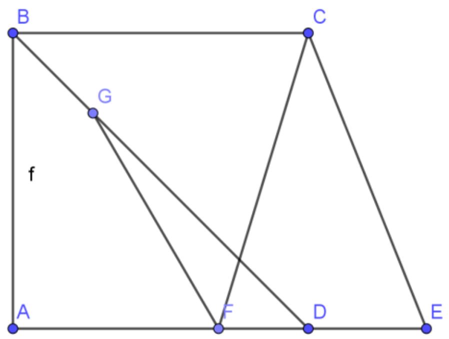
1. Волк увидел косулю в нескольких метрах от себя и погнался за ней по прямой лесной тропе. Прыжок волка на 22% короче прыжка косули. Оба животных прыгают с постоянной скоростью. Все прыжки косули имеют одинаковую длину, прыжки волка тоже равны между собой. Существует промежуток времени, за который и волк и косуля делают по некоторому целому числу прыжков. При этом каждый раз оказывается, что волк сделал на t% прыжков больше, чем косуля. Найдите наибольшее целое значение t, при котором волк не сможет догнать косулю.

Решение: Пусть x – длина прыжка косули, тогда 0,78x – длина прыжка волка; y – число прыжков косули в единицу времени, указанную в условии, $y(1+\frac{t}{100})$ - количество прыжков волка в эту же единицу времени. Волк не сможет догнать косулю, если путь, проходимый косулей в единицу времени -xy – будет всегда больше, чем путь, проходимый волком в эту же единицу времени - $0,78xy(1+\frac{t}{100})$. Составим неравенство: $0,78xy(1+\frac{t}{100})<xy; 1+\frac{t}{100}<\frac{50}{39}; t<\frac{1100}{39}$.

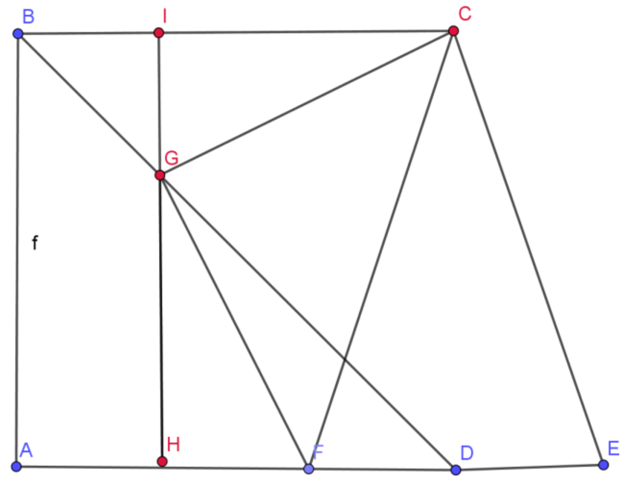
Максимальное значение t, удовлетворяющее этому неравенству, t = 28%.

Ответ: 28.

2. Дана прямоугольная трапеция ABCE, основания которой (BC меньше AE) равны 3 и 4. Меньшая боковая сторона AB=BC. На AE отмечена точка D, так что AD: DE=3:1; на AD отмечена точка F, так что AF: FD =2:1; на BD отмечена точка G, так что BG: GD=1:2. Определите градусную меру угла CFG.



Решение. Построим высоту IH, так что $G \in IH$ и соединим точки C и G.



1) $\blacktriangle IGC = \blacktriangle GFH$ - по двум катетам, так как $IC = GH = 2; = DH = 3;$ $IG = HF = 1;$ поэтому $FG = GC,$ $\angle ICG = \angle FGH = \alpha,$ и $\angle HFG = \angle IGC = 90^0 - \alpha.$

2) $\blacktriangle FGC$ - прямоугольный равнобедренный, так как $FG = FD,$ и $\angle HGF + \angle FGC + \angle IGC = 180^0.$ $\angle FGC = 180^0 - \angle HGF - \angle IGC.$

$\angle FGC = 180^0 - \alpha - 90^0 + \alpha = 90^0.$Значит $\angle GFC = 45^0.$

Ответ: 45.

3. В арифметической прогрессии (a_n) $a_{1000} = 75,$ $d = 0,25.$

Вычислить: $99 \cdot 100 \cdot \left(\dfrac{1}{a_{1580} \cdot a_{1581}} + \dfrac{1}{a_{1581} \cdot a_{1582}} + \ldots + \dfrac{1}{a_{2019} \cdot a_{2020}} \right).$

Решение: Выражение в скобке состоит из нескольких слагаемых вида $\dfrac{1}{x \cdot (x+d)}$, которые можно разложить в сумму простейших дробей: $\dfrac{1}{x \cdot (x+d)} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+d} \right)$. Преобразуем исходное выражение: $99 \cdot 100 \cdot \left(\dfrac{1}{a_{1580} \cdot a_{1581}} + \dfrac{1}{a_{1581} \cdot a_{1582}} + \ldots + \dfrac{1}{a_{2019} \cdot a_{2020}} \right) =$

$$= 99 \cdot 100 \cdot \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{1580}} - \frac{1}{a_{1581}} + \frac{1}{a_{1581}} - \frac{1}{a_{1582}} + \ldots + \frac{1}{a_{2019}} - \frac{1}{a_{2020}} \right) =$$

$$= 99 \cdot 100 \cdot \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{1580}} - \frac{1}{a_{2020}} \right) = 99 \cdot 100 \cdot \frac{1}{d}\left(\frac{a_{2020} - a_{1580}}{a_{2020} \cdot a_{1580}} \right) = 99 \cdot 100 \cdot \frac{1}{d}\left(\frac{(2019-1579)d}{a_{2020} \cdot a_{1580}} \right) =$$

$$=99\cdot 100\cdot \frac{1}{d}\left(\frac{(2019-1579)d}{a_{2020}\cdot a_{1580}}\right)=99\cdot 100\cdot \frac{1}{d}\cdot \frac{440d}{330\cdot 220}=60,$$

так как $a_{2020}=a_{1000}+1020d=75+1020\cdot 0,25=330$, а

$a_{1580}=a_{1000}+580d=75+580\cdot 0,25=220$.

Ответ: 60.

4. В $\triangle ABC$ с $\angle B=120^0$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 .

Отрезок A_1B_1 пересекает биссектрису CC_1 в точке М. Найти угол ΔB_1C_1M .

Решение.

Продолжим сторону AB за точку В, тогда BC биссектриса угла $\angle B_1BK$, а значит точка A_1 равноудалена от сторон B_1B и BK .

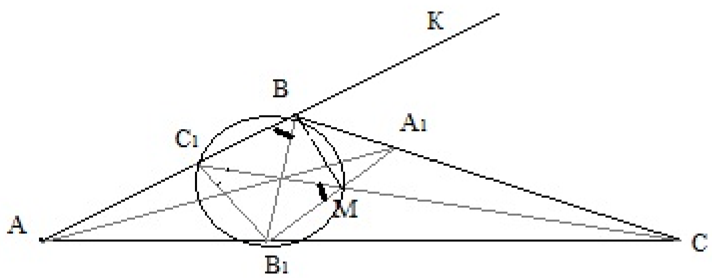
Учитывая, что точка A_1 лежит на биссектрисе $\angle BAC$, а значит и равноудалена от его сторон, получаем, что A_1 равноудалена от сторон B_1B и B_1C, а значит лежит на биссектрисе $\angle BB_1C$. Аналогично доказываем, что B_1C_1 биссектриса $\angle AB_1B$.

Следовательно $\angle C_1B_1A_1=90^\circ$, как угол между биссектрисами смежных углов.

В $\triangle BB_1C$ M точка пересечения биссектрис B_1A_1 и CC_1, а значит, и BM тоже биссектриса $\angle B_1BC$, следовательно $\angle B_1BM=\angle MBC=30^\circ$.

$\angle ABM=\angle C_1BB_1+\angle B_1BM=60^\circ+30^\circ=90^\circ$, а следовательно вокруг четырехугольника BMB_1C_1 можно описать окружность. Значит $\angle B_1MC_1=\angle B_1BC_1=60^\circ$, как опирающиеся на одну дугу.

Ответ: 60.



5. У двух племен один шаман. Одно племя живет в долине реки, другое - на холме, на склоне горы. В связи с распространением интернета и слухов, шаману пришлось снизить цены на свои услуги. Для племени, живущего в долине, на 10 % «в мехах» и на 15 % « в рыбе». Соотношение цен меха и рыбы на местном рынке постоянно. Для племени на холме цена « в мехах» снизилась на 20%. На сколько процентов снизилась цена услуг «в рыбе» для этого племени? Ответ округлите до десятых после запятой.

Решение. Для племени, живущего в долине,снижение цены в «мехах»: 0,9х; в «рыбе» 0,85х. Соотношение цен на местном рынке постоянно $\frac{0,9}{0,85}=\frac{18}{17}$.Для племени на холме снижение в «мехах» 0,8х, а цена в «рыбе» пусть стала у. $\frac{18}{17}=\frac{0,8x}{y}; y=\frac{0,4x\cdot 17}{9}; (1-\frac{6,8}{9})x=\frac{2,2x}{9}$; снижение в процентах $\frac{2,2x}{9x}\cdot 100\%=\frac{220}{9}=24,4$

Ответ:24,4.

6. Какое наименьшее значение может принимать функция $F(x;y)=6y+8x-9$, при условии, что $x^2+y^2+25=10(x+\text{y})$.

Решение:

$x^2+y^2+25=10(x+\text{y}) \Leftrightarrow (x-5)^2+(y-5)^2=5^2$ – это окружность с центром (5;5) и радиусом 5.
Пусть $F(x;y)=\text{M}$, тогда $\text{M}=6y+8x-9$ – это прямая.
Условие минимума функции равносильно условию минимума М, при котором данная прямая будет касательной к окружности. То есть расстояние от центра окружности до прямой равно ее радиусу.

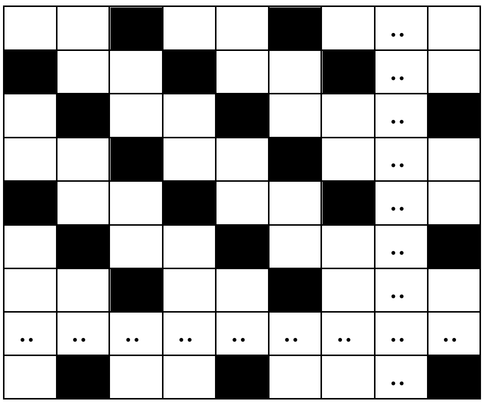
$$\frac{|30+40-9-\text{M}|}{\sqrt{36+64}}=5 \Rightarrow |61-\text{M}|=50 \Rightarrow \text{M}=11 \text{ или } \text{M}=111.$$

Ответ: 11.

7. Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 65 клеток (65х65 – всего в квадрате 4225 клеток), чтобы среди любых четырех его клеток, образующих уголок (фигуру «Г»), обязательно была хотя бы одна закрашенная.

Решение.

Закрашивать надо по диагонали каждую 3-ю (см. рис.). Таким образом, будет закрашено $[\frac{N^2}{3}]$ клеток. Это минимально возможное количество, так как внутри любого квадрата 3х3 нужно закрашивать не менее трех клеток. $\left[\frac{65^2}{3}\right]=1408$.



Ответ: 1408.

8. Найдите сумму всех целых значений с, при которых уравнение 10|p-3|+|2p-|p+c||=6p относительно p имеет хотя бы один корень.

Решение:

Рассмотрим функцию f(r)= 10|p-3|+|2p-|p+c||-6p. Коэффициент при первом модуле по модулю больше суммы остальных коэффициентов при p. 10>2+1+6. Отсюда следует, что на всех интервалах до p=3 коэффициент линейного приращения отрицателен, а после p=3 - положителен. p=3 - точка минимума. Для того, чтобы уравнение f(p)=0 имело хотя бы один корень, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$f(3) \leq 0$

$\Rightarrow$ Возьмём |c+3|=t; $|6-t|-18 \leq 0$

$(6-t)^2-18^2 \geq 0$

$(24-t)(t+12) \geq 0$

$t \in [-12;24]$

$|c+3| \leq 24$

Ответ: -147.

9. Известно, что количество берёз на некоторой делянке смешенного леса составляет от 13% до 14% общего количества деревьев. Найдите минимально возможное общее количество деревьев на этой делянке.

Решение:

Пусть общее количество деревьев L. А количество берёз x. Задачу можно переформулировать так: найдите наименьшее натуральное число L, для которого существует такое натуральное число x, что $\frac{13}{100} < \frac{x}{L} < \frac{14}{100}$. Чем меньше x, тем меньше соответствующее L (при малых x это действительно так). При $x=1$ не существует удовлетворяющего системе натурального L. При $x=2$ находим, решая систему неравенств, что L=15. Из неравенства $L > \frac{100x}{14}$ заключаем, что $L > 15$ при $x \geq 3$.

Ответ: 15.