Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 419004
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Тимонов Арсений Сергеевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Волгоград, МОУ Лицей № 3 Тракторозаводского района, 9 класс

Регистрационный номер 1730

Вариант задания 7

Дата проведения «29» февраля 2010 г.

Подпись участника ТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

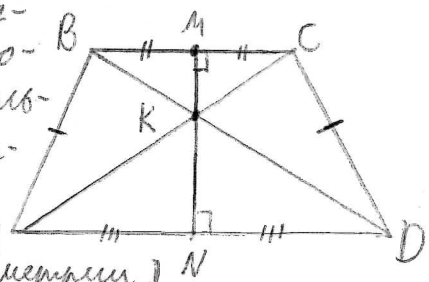
Шифр 419004
заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего
10	15	15	20	20	20					Σ 100
10	15	15	20	20	20					100

Ткач Л.И

Вариант № 7

Задача 2. 15б.



Из-за того, что эта трапеция равнобедренная, можно сделать несколько заключений: 1) Трапеция симметрична относительно прямой MN; 2) Точка пересечения диагоналей лежит на прямой MN.

Заметим, что $BK = KC$ и $AK = KD$ (в силу симметрии), тогда т.к. диагонали перпендикулярны, то треугольники BKC и AKD — и прямоугольные и равнобедренные, значит KM — высота $\triangle BKC$ (т.к. она его медиана) и KN — высота $\triangle AKD$ (т.к. она его медиана). Воспользуемся свойством медианы прямоугольного треугольника: $KM = \frac{1}{2}BC = x$; $KN = \frac{1}{2}AD = y$, тогда высота трапеции $h = KM + KN = x + y$, запишем формулу площади трапеции: $S = MN \cdot \frac{(BC+AD)}{2} = (x+y)\cdot\frac{(2x+2y)}{2} = (x+y)^2 = h^2 = 100$, значит высота трапеции равна $\sqrt{100} = 10$

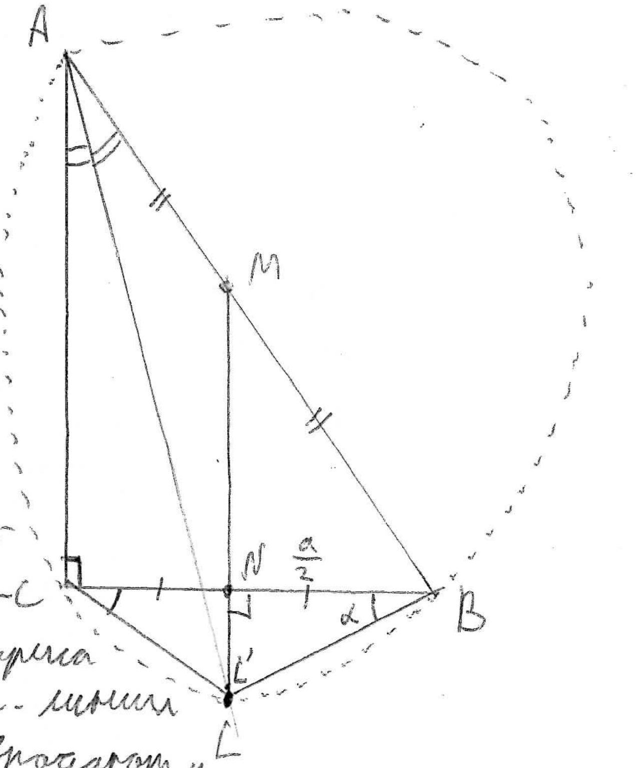
Ответ: 10.

Задача 3.

Одна шляпка, лежа на первой полке, добавит к конечной сумме $100\cdot(\frac{1}{20})\%$, а лежа на второй полке, — $100\cdot(\frac{1}{19})\%$, тогда сумма процентов на обеих полках можно записать, как: $x\cdot 100\cdot(\frac{1}{20})\% + (21-x)\cdot 100\cdot(\frac{1}{19})\%$ но т.к. если мы переложим шляпку с первой полки на вторую у нас получится: $(x-1)\cdot 100\cdot(\frac{1}{20})\% + (21-(x-1))\cdot 100\cdot(\frac{1}{19})\% =$
$= x\cdot 100\cdot(\frac{1}{20})\% + (21-x)\cdot 100\cdot(\frac{1}{19})\% + 100\cdot(\frac{1}{19})\% - 100\cdot(\frac{1}{20})\%$ (т.к. $\frac{1}{19} > \frac{1}{20}$, мы прибавим больше чем отняли, и следовательно сумма увеличилась), значит мы должны сделать максимальное кол-во шляпок на второй полке чтобы получить максимальную сумму, но на второй полке ≤ 19 ~~предмет~~ шляпок, значит максимальная сумма процентов равна:
$2\cdot 100\cdot(\frac{1}{20})\% + 19\cdot 100\cdot(\frac{1}{19})\% = 110\%$.

Ответ: 110%

Задача 4.5. 20б.



Опишем окружность около треугольника ABC, докажем, что точка L лежит на этой окружности, пусть MN пересекает окружность в т. L' (Заметим, что MN, как средняя линия $\triangle ABC$ параллельна AC и следовательно перпендикулярна BC и проходит через середину BC, значит MN — ~~серед~~ серединный перпендикуляр к BC):

L' равноудалена от точек B и C, значит дуги BL и CL равны, как и углы на них опирающиеся: $\angle CAL' = \angle BAL'$, значит AL' — это биссектриса угла CAB и если $L' \neq L$, то у биссектрисы и ср. линии целых две общие точки, значит они совпадают и $AL \parallel AC$, то есть биссектриса совпадает со смежной стороной и треугольник получается вырожденным, а нам сказано, что треугольник прямоугольный, значит $L' = L$ и $L \in \omega$ (описанной окружности $\triangle ABC$), значит эта окружность является описанной и для треугольника ACL и для $\triangle CBL$, следовательно найдя радиус описанной окружности $\triangle CBL$ мы найдём таковой для $\triangle ACL$, воспользуемся теоремой синусов: $2R = \frac{BL}{\sin\angle BCL}$ (т.к. $CL = BL \Rightarrow \triangle BCL$ — равноб. $\Rightarrow \angle CBL = \angle BCL = \alpha$)

$2R = \frac{BL}{\sin\alpha}$. $\cos\alpha = \frac{BN}{BL} \Rightarrow BL = \frac{BN}{\cos\alpha}$ (BN — половина BC $\Rightarrow BN = \frac{a}{2}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2R = \frac{a}{2\sin\alpha\cos\alpha} \Rightarrow R = \frac{a}{4\sin\alpha\cos\alpha}$.

Ответ: $\frac{a}{4\sin\alpha\cos\alpha}$.

Задача 6. 20б.

Найдём ближайший к числу квадрат, это $625^2 = 390625$, то есть $625^2 = 390629 - 2^2$, так же заметим, что $627^2 - 625^2 = (627+625)(627-625) =$ $= 1252 \cdot 2 = 2504 = 2500 + 4 = 50^2 + 4$, заменим 625^2 на $390629 - 2^2$, получим:

$627^2 - (390629 - 2^2) = 50^2 + 2^2 \Rightarrow 627^2 - 390629 + 4 = 50^2 + 4 \Rightarrow 627^2 - 50^2 = 390629 \Rightarrow$

$\Rightarrow (627+50)(627-50) = 390629$, значит число 390629 — составное ($390629 =$ $= 677 \cdot 577$)

Ответ: Не является простым.

Задача 1. 10б

$$2\sqrt{(4x-9)^2}+\sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leqslant 18-8x \qquad \begin{cases} x\geqslant 0 \\ 3\sqrt{x}-5+2|x-2|\geqslant 0\end{cases}$$

$$2|4x-9|+\sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leqslant 18-8x$$

Если $x\leqslant\frac{9}{4}$, то $4x-9\leqslant 0$:

$$18-8x+\sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leqslant 18-8x$$

$\sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leqslant 0$, но это выражение $\geqslant 0$, значит оно $=0$.

$$\sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}=0$$

$$3\sqrt{x}-5+2|x-2|=0$$

$x\geqslant 2$:

$3\sqrt{x}-5+2x-4=0$

$t=\sqrt{x}$

$2t^2+3t-9=0$

$D=9+72=81$

$t_{1,2}=\frac{-3\pm 9}{4}$: -3; $1{,}5$

$x_{1,2}$: $(-3)^2=9$ П.К. т.к. $x\leqslant\frac{9}{4}$; $(1{,}5)^2=2{,}25=\frac{9}{4}$ ✓

$x<2$:

$3\sqrt{x}-5+4-2x=0$

$t=\sqrt{x}$

$2t^2-3t+1=0$

$D=9-8=1$

$t_{3,4}=\frac{3\pm 1}{4}$: 1; $0{,}5$

$x_{3,4}$: $(1)^2=1$ ✓; $(0{,}5)^2=0{,}25$ ✓

Если же $x>\frac{9}{4}$, т.е. $4x-9>0$, то:

$$8x-18+\sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leqslant 18-8x$$

$$\sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leqslant 36-16x$$

$36-16x=4(9-4x)<0$, но $\sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\geqslant 0$, получаем:

$0\leqslant\sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leqslant 36-16x<0 \Rightarrow 0<0$, неверно, значит для $x>\frac{9}{4}$, решений неравенство не имеет.

Ответ: $x=2{,}25$; 1; $0{,}25$.

Задача 4.

Если $a=0$, то $0\cdot(x-|x|+2)=|x-3|-2 \Rightarrow |x-3|=2 \Rightarrow x=5$ или $x=1$ – 2 решения, если $a>0$, то $ax-a|x|+2a=|x-3|-2$, при $x\leqslant 0$, получаем: $ax+ax+2a=3-x-2 \Rightarrow$ $\Rightarrow (2a+1)x=1-2a \Rightarrow x=\frac{1-2a}{2a+1}$ (при $a>0$: $2a+1>0$, значит для того, чтобы такое решение было a должно быть больше $0{,}5$, чтобы числитель был отрицательным), при $0<x\leqslant 3$ получаем: $ax-ax+2a=3-x-2 \Rightarrow x=1-2a$ заметим, что если a меньше чем $0{,}5$, то такой корень существует, но в любом случае система:

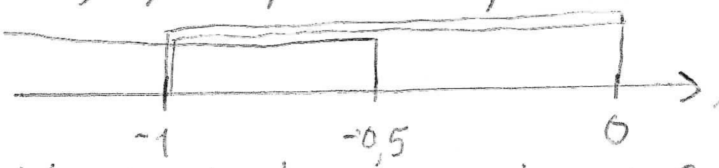
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{1-2a}{2a+1}\\ x\leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x=1-2a\\ x\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.$$

имеет при положительных a, только одно решение и при $a<0{,}5$ (решение дает первая подсистема) и при $a=0{,}5$ (в обеих системах решением является 0) и при $a>0{,}5$ (решение дает вторая подсистема).

При $x>3$, получаем: $ax-ax+2a=x-3-2 \Rightarrow x=2a+5$ (т.к. $a>0$, то $2a+5>5>3$, значит при любом a есть решение). Значит при $a>0$ всегда такое уравнение имеет 2 решения.

Если же $a<0$, то получаем при тех же условиях следующее:

$x<0 \Rightarrow x=\frac{1-2a}{2a+1}$, верно при $a<-0{,}5$; $0\leq x\leq 3 \Rightarrow x=1-2a$, верно при $a\geq -1$ (значит на промежутке $(-\infty;-1)$ у нас верно только одно равенство, на промежутке $[-1;-0{,}5)$ верны оба равенства, ~~то есть~~ а на промежутке $[-0{,}5;0)$ опять только одно, при том во втором промежутке $\frac{1-2a}{2a+1}\neq 1-2a$, значит значения x различны), $x>3 \Rightarrow$ $\Rightarrow x=2a+5$, верно при $a>-1$, получаем суммарно такие промежутки:



, значит количество решений таково: $a\in(-\infty;-1)$ − 1 решение; $a=-1$ − 2 решения; $a\in(-1;-0{,}5)$ − 3 решения; $a\in[-0{,}5;0)$ − 2 решения.

Тогда общий ответ таков: $a\in(-\infty;-1)$ − 1 решение, $a\in[-1]\cup$ $\cup[-0{,}5;+\infty)$ − 2 решения; $a\in(-1;-0{,}5)$ − 3 решения.