Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1 лист

Шифр 419010

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Федулов Дмитрий Евгеньевич

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Барнаул, МБОУ „Гимназия №42"

Регистрационный номер 2160,9

Вариант задания 8

Дата проведения "29" февраля 2020 г.

Подпись участника

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	15	15	10	20	нет					70
10	15	15	10	20	0 нет					70

Шифр 419010

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Ткач Л.И.

Вариант № 8

N1. 10б.

$4\sqrt{(4x-5)^2}+\sqrt[4]{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leq 20-16x;$

$4|4x-5|+\sqrt[4]{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leq 20-16x;$ $|16x-20|+\sqrt[4]{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leq 20-16x$

Раскрытие модуля. проведем 2 случая:

I $4x<5$

$x<1,25$

$20-16x+\sqrt[4]{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leq 20-16x$

$\sqrt[4]{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leq 0$

Чётный корень не может быть меньше 0, значит он равен ему.

$3\sqrt{x}-5+2|x-2|=0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>2\\2x+3\sqrt{x}-9=0\end{cases}\\\begin{cases}x\leq 2\\-2x+3\sqrt{x}-1=0\end{cases}\end{array}\right.$$

1. $2x+3\sqrt{x}-9=0$ Замена: $\sqrt{x}=t$

$2t^2+3t-9=0$

$D=9+72=81$

$t_1=\frac{-3+9}{4}=1,5$

$t_2=\frac{-3-9}{4}=-3$

$$\begin{cases}x>2\\x<1,25\\\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=1,5\\\sqrt{x}=-3\end{array}\right.\end{cases}$$ $\sqrt{x}=-3$ — нет решений

$x=2,25$, но $x<1,25$

2. $2x-3\sqrt{x}+1=0$ Замена: $\sqrt{x}=t$

$D=9-8=1$

$t_1=\frac{3+1}{4}=1$

$t_2=\frac{3-1}{4}=0,5$

$$\begin{cases}x\leq 2\\x<1,25\\\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=1\\\sqrt{x}=0,5\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0,25\end{array}\right.\\x\leq 2\\x<1,25\end{cases}$$ → корни.

II. $4x\geq 5$

$x\geq 1,25$

$16x-20+\sqrt[4]{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\leq 20-16x$

$\sqrt[4]{3\sqrt{x}-5+2|x+2|}\leq 40-32x$

$40-32x\geq 0$, так. как чётный корень всегда положителен

$32x \le 40$

$x \le \frac{40}{32} = \frac{5\cdot 8}{8\cdot 4}$

$\begin{cases} x \le 1,25 \\ x \ge 1,25 \end{cases} \Rightarrow x = 1,25$

2-е условие:

$3\sqrt{x} - 5 + 2|x-2| \ge 0$

$\cancel{\begin{cases} x = 1,25 \\ x \ge 2 \end{cases}}$ ~~условие~~

$\cancel{3\sqrt{x} - 5 + 2x - 4 \ge 0}$

$x = \frac{5}{4}$

$3\sqrt{\frac{5}{4}} - 5 + 2\left|\frac{5}{4} - 2\right| \ge 0$

$3\frac{\sqrt{5}}{2} - 5 + \frac{6}{4} \ge 0$

$\frac{6\sqrt{5} + 6 - 20}{4} \ge 0$

$6\sqrt{5} + 6 - 20 \ge 0$

$\cancel{\sqrt{5} \approx 2,2}$

Выведем корень из числа x, чтобы узнать число при котором выражение равно 0

$6x + 6 - 20 = 0$

$6x = 14$

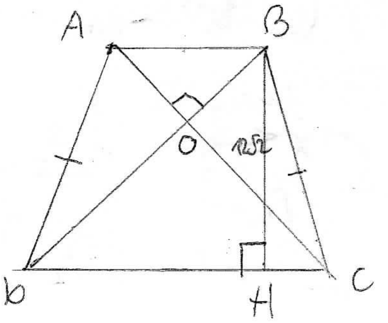
$x = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$ $\quad x^2 = \frac{49}{9}$ $\quad x^2 > \sqrt{5}^2$

$\Downarrow$

Выражение меньше 0, значит $x \ne 1,25$

ответ: $x = 1$, $x = 0,25$

№2. 155.



Дано:

$ABCD$ – трапеция

$BH = 12\sqrt{2}$ $\quad \angle BOA = 90°$

BH – высота

Найти:

S_{ABCD}

Решение:

Площадь трапеции можно посчитать двумя формулами:

$$\begin{cases} S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sin\alpha\, d_1 d_2 \\ S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2}\cdot BH \end{cases}$$

$\sin\alpha = \sin_{BOA} = 1$

Рассмотрим ΔDBC и ΔADC:

1. $AD = BC$
2. $\angle ADC = \angle BCD$ (равнобедренная трапеция)
3. DC – общие

$\Downarrow$

$\Delta DBC = \Delta ADC$

$\Downarrow$

$DB = AC = d_1 = d_2$

Найдем DH:

$DC = AB + \frac{DC-AB}{}$

$DH = AB + \frac{DC-AB}{2} = \frac{AB+DC}{2}$

ΔDBH:

$d_1^2 = DB^2 = DH^2 + BH^2 = \frac{(AB+DC)^2}{4} + 288$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1^2 = \frac{(AB+DC)^2}{8} + 144$

$S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2}\cdot 12\sqrt{2}$

$\frac{(AB+DC)^2}{8} + 144 = \frac{AB+CD}{2}\cdot 12\sqrt{2}$

Замена:
$AB + CD = x$

$\frac{x^2}{8} + 144 - 12\sqrt{2}\,\frac{\overset{x}{(AB+CD)}}{2} = 0 \quad |\cdot 8$

$x^2 - 48\sqrt{2}\,x + 1152 = 0$

$D = 48\cdot 48\cdot 2 - 4\cdot 8\cdot 144 = 12\cdot 12\cdot 4\cdot 4\cdot 2 - 4\cdot 4\cdot 2\cdot 12\cdot 12$

$= 0$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{48\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2}$

$S_{ABCD} = \frac{x}{2}\cdot 12\sqrt{2} = \frac{24\sqrt{2}}{2}\cdot 12\sqrt{2} = 12\sqrt{2}\cdot 12\sqrt{2} =$

$= 144\cdot 2 = 288$

ответ: 288 у.е.^{2}

№3.

27 – пальто 24 – платья Комната 1 – 25 комната 2 – 26

$27 + 24 = 51$ $25 + 26 = 51$

Пусть x – кол-во пальто в 1 комнате, тогда сумма предметов:

$$S = \frac{x}{26} + \frac{27-x}{25}$$ $27-x$ – кол-во пельмень в 1-ой комнате

$$S = \frac{x^{(25}}{26} + \frac{27-x^{(26}}{25} = \frac{25x + 702 - 26x}{650} = \frac{702-x}{650}$$

минимальное $x=2$, так как в 1-ой комнате 25 цифр, а во второй 2

$$S = \frac{702-2}{650} = \frac{700}{650} = \frac{70}{65} = \frac{14}{13}$$

ответ: максимальная величина долей пельмень в комнатах $-\frac{14}{13}$

№4.

$(a-1)(x+|x|+1) = |x+4|-3$

Для всех возможных раскрытий модулей выразим x через a:

$x < -4$

$(a-1)(x-x+1) = -x-4-3$

$a-1 = -x-7$

$-x = a+6$

$x = -a-6$

$-a-6 < -4$

$-a < 2$

$\begin{cases} a > -2 \\ x = -a-6 \end{cases}$

$-4 \leq x < 0$

$(a-1)(x-x+1) = x+4-3$

$a-1 = x+1$

$x = a-2$

$\begin{cases} a-2 \geq -4 \\ a-2 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a \geq -2 \\ a < 2 \\ x = a-2 \end{cases}$

$x \geq 0$

$(a-1)(2x+1) = x+1$

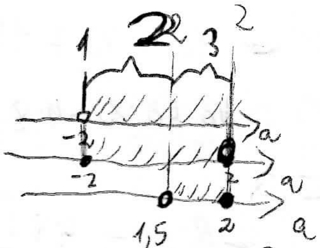
$a(2x+1) = 3x+2$

$2xa + a - 2 = 3x$

$3x - 2xa = a-2$

$x(3-2a) = a-2$

$x = \frac{a-2}{3-2a}$



$\frac{a-2}{3-2a} \geq 0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-2 \geq 0 \\ 3-2a > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a-2 \leq 0 \\ 3-2a < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 2 \\ a < 1,5 \end{cases} \text{ – не выполняется} \\ \begin{cases} a \leq 2 \\ a > 1,5 \end{cases} \end{array}\right.$

ответ: если $a \in [-2; 1,5] \cup \{2\}$, то ~~$x = -a-6$, $x = a-2$~~ кол-во решений два +

если $a = -2$, то решение одно +

если $a \in (1,5; 2]$, то кол-во решений три +

если $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, то решений нет. –

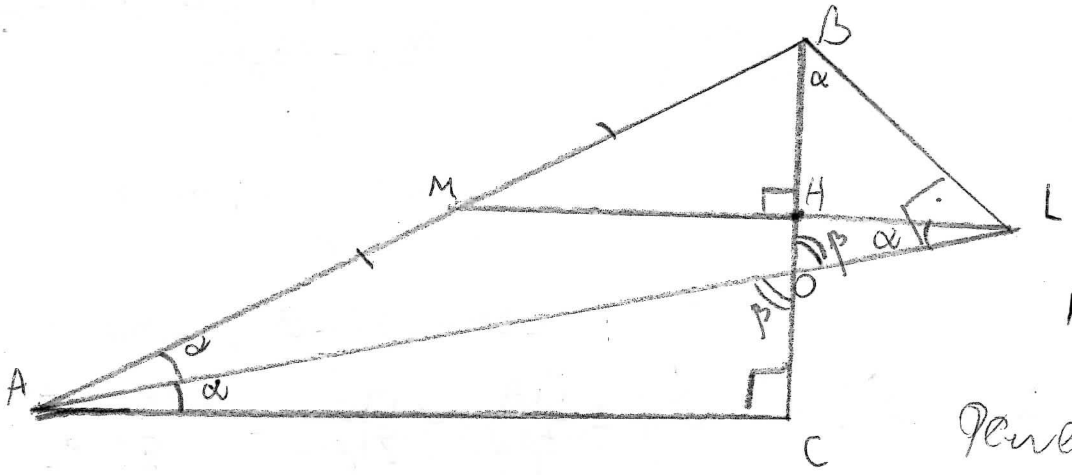
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 419010

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 8



Дано:
$\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$)
MH – сер. пер. к BC
$BC = a$
~~L~~ L – бис. $\angle A \cap MH$
Найти:
r описанной окр. AML окр.

Решение:

1. $\angle MLA = \angle MAL$, т.к. $ML \parallel AC$. $\Rightarrow \triangle AML$ – равнобедр., $AM = ML = MB$

$\angle BLA = 90^\circ$ (по признаку прямоугольного треугольника)?

$\angle BOL = 90 - \alpha = \angle AOC$ (вертикальные углы)

$\angle BAO = \angle OAC = 90^\circ - \angle AOC = 90^\circ - 90^\circ + \alpha = \alpha$

2. Найдем AM:

$\triangle BHL$: $HL = tg\alpha\, BH = tg\alpha \frac{a}{2}$ +

$\triangle MBH$: $MH = ML - HL = MB - tg\alpha \frac{a}{2}$, $BH = \frac{a}{2}$

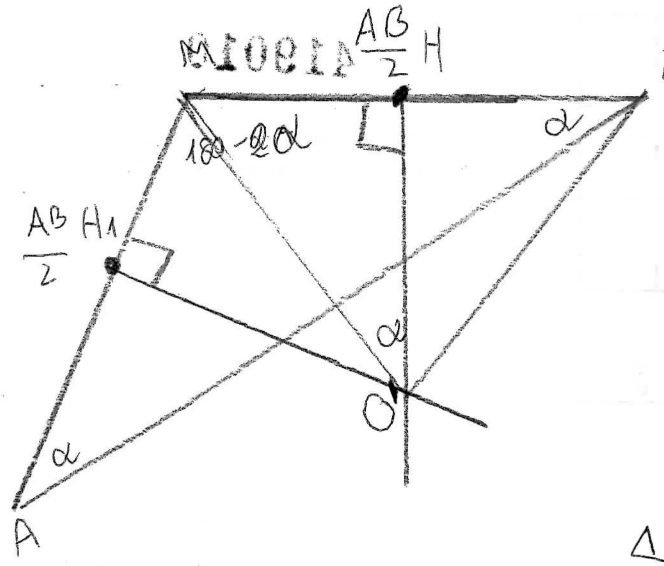
$MB^2 = (MB - tg\alpha \frac{a}{2})^2 + BH^2$

$\cancel{MB^2} = \cancel{MB^2} - 2MB\, tg\alpha \frac{a}{2} + tg^2\alpha \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$

$a\, MB\, tg\alpha = \frac{a^2}{4}(tg^2\alpha + 1)$ $\quad MB = \frac{a(tg^2\alpha+1)}{4tg\alpha} = AM = ML$

3. Радиус ~~вписанной~~ описанной окружности – расстояние от вершины треугольника до центра окружности. Центр окружности – точка пересечения сер. пер.

Рассмотрим $\triangle AML$ отдельно:



Доп. построение:

сер. перп. к ML

сер. перп. к AM

перпендикуляры пересекаются в точке O'.

сер. перп. к $ML = O'H$

к $AM = O'H_1$

Надо найти $O'L$.

$\triangle MOH_1$, $\triangle MHO$: $MH = MH_1 = \frac{AM}{2}$

MO – общая

$$\Downarrow$$

$$\triangle MOH_1 = \triangle MHO$$

$$\Downarrow$$

$$\angle OMH = 90^\circ - \alpha, \quad \angle MOH = \alpha$$

$\triangle HLO'$: $O'H = \frac{MH}{tg\alpha} = \frac{MB}{2tg\alpha} = \frac{a(tg^2\alpha+1)}{8tg^2\alpha}$

$HL = \frac{MB}{2} = \frac{a(tg^2\alpha+1)}{8tg\alpha}$

$$OL = \sqrt{\frac{MB^2}{4tg^2\alpha} + \frac{MB^2}{4}} = \frac{MB}{2}\sqrt{\frac{1}{tg^2\alpha}+1} = \frac{a(tg^2\alpha+1)}{8tg\alpha}\sqrt{\frac{1}{tg^2\alpha}+1}$$

~~$= a(tg^2\alpha+1)\sqrt{\ldots 64tg^2\alpha} = r$~~

Ответ: $r = \frac{a(tg^2\alpha+1)}{8tg\alpha}\sqrt{\frac{1}{tg^2\alpha}+1}$ +