Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 118057

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Анисимова Вероника Артёмовна

Город, № школы (образовательного учреждения) Университетская гимназия МГУ им. Ломоносова, г. Москва

Регистрационный номер 1568 класс 8

Вариант задания 3

Дата проведения «16» февраля 2020 г.

Подпись участника Анис

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего
0б	15б	15б	~~0б~~	0б	20б					~~50б~~
0б.	15б.	15б.	5б	0б.	20б					55б.

Шифр 118057
заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

Аманатова

Ишунина

$\Sigma = 55$

Вариант № 3

Задача 1

Заметим, что если все 4 испытания не прошел никто, то у каждого пройдено ≤ 3 испытания, т.е в сумме чх $\leq 90 \cdot 3 = 270$, а $70+40+85+75=270$, значит, каждый прошел ровно 3 испытания.

И третье, и четвертое испытание прошли не больше 75 человек, потому что четвертое прошли 75, т.е 10 человек, прошедших третье, обязательно прошли и первое, и второе. Запишем количество людей, прошедших каждое испытание, которые могли бы пройти и третье, и четвертое.

I. 60
II. 30
III. 75
IV. 75

Пусть и третье, и четвертое прошли x человек, тогда кол-во чел, прошедш. I, + кол-во чел, прошедш II, $= x$, т.к каждый из x мог пройти либо I, либо II по отдельности. x не может быть равен 75, т.к $60+30=90 \neq 75$. Значит, кто-то из этих людей прошёл I и II вместе и что-то одно из III и IV. Тогда можно записать ур-е: $x = 75 - y = 90 - 2y \Rightarrow y = 15,\ x = 60$.

Ответ: 60 человек прошли в следующий тур. 0б

Неверно!

Задача 2

Если $f(x) = x^2 - 5x + 1580$, то $f(2-x) = f(2x-1)$ можно записать:

$(2-x)^2 - 5(2-x) + 1580 = (2x-1)^2 - 5(2x-1) + 1580$

$4 - 4x + x^2 - 10 + 5x - 4x^2 + 4x - 1 + 10x - 5 = 0$

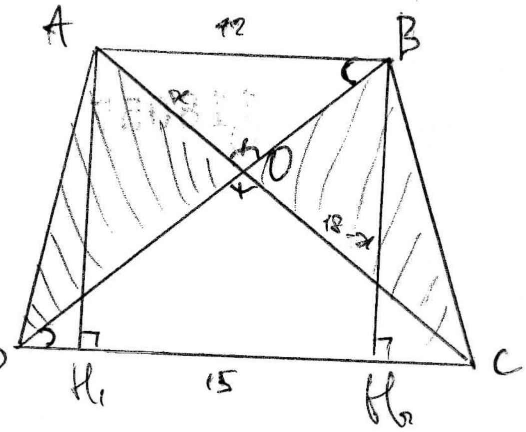
$-3x^2 + 15x - 12 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225-144}}{-6} = \frac{-15 \pm 9}{-6} = 1; 4.$

Ответ: 1 и 4

15б

Задача 3.



Проведем $AH_1 \perp DC$ и $BH_2 \perp DC$

$S_{ADC} = \frac{1}{2} DC \cdot AH_1 = S_{AOD} + S_{DOC}$ Неверно.

$S_{DBC} = \frac{1}{2} DC \cdot BH_2 = S_{BOC} + S_{DOC}$ $\Rightarrow S_{ADC} = S_{DBC}$

$\Updownarrow$

$\frac{1}{2} DC \cdot AH_1 = \frac{1}{2} DC \cdot BH_2$

$\Downarrow$

$AH_1 = BH_2$

Если расстояния между двумя прямыми в двух разных точках равны, то прямые параллельны. $\Rightarrow AB \parallel CD$

$AB \parallel CD \Rightarrow \angle ABO = \angle ODC$ как накрест лежащие; $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные. Значит, $\triangle BOA \sim \triangle DOC$ по 2м углам $\Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{AB}{DC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

$\frac{AO}{OC} = \frac{4}{5}$, $AO + OC = 18 \Rightarrow AO = 8$, $OC = 10$

Ответ: 8. 15б

Задача 4.

$$\left| \frac{-3x^4 + (a+1)x^3 + (3a+3)x^2 + (1-a^2)x}{(x^2-a-1)(a-3x-1)} \right| = \sqrt{a^2-10a+25} = \sqrt{(a-5)^2} = |a-5|$$

Посчитаем отдельно $(x^2-a-1)(a-3x-1) =$

$= ax^2 - 3x^3 - x^2 - a^2 + 3ax + a - a + 3x + 1 = -3x^3 + x^2(a-1) + x(3a+3) + (a+1)(1-a)$

если прибавить к этому $2x^2$ и домножить всё на x, то мы получим числитель первой дроби.

$$\left| \frac{x(x^2-a-1)(a-3x-1) + 2x^3}{(x^2-a-1)(a-3x-1)} \right| = |a+5|$$

5

$$\left| x + \frac{2x^3}{(x^2-a-1)(a-3x-1)} \right| = |a+5|.$$ Теперь рассмотрим случаи раскрытия модуля:

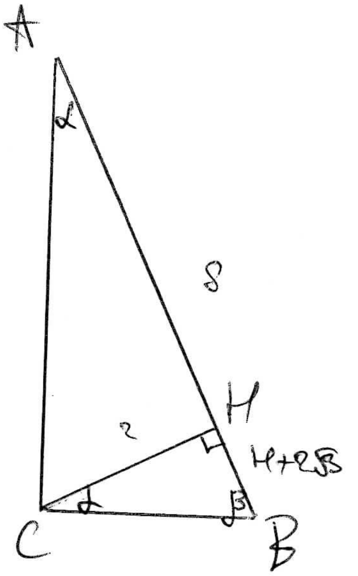
$x + \frac{2x^3}{(x^2-a-1)(a-3x-1)} = a+5$, если $a \geq -5$ и $x \geq -\frac{2x^3}{(x^2-a-1)(a-3x-1)}$

$x\left(1 + \frac{2x^2}{(x^2-a-1)(a-3x-1)}\right) = a+5$ - не решается

Верно!

* Возможно в условии опечатка: в числителе $(a-1)x^3$, например. Тогда бы всё сократилось в лев. части и ответ был бы $a=5$ ($\underset{x=0}{|x| = |a-5|}$) т. к. одно решение в ур-и $|x| = |y|$ будет, когда $x=0$. 5б ~~5б~~

Задача 5. По решению прямоуг Δ:



$CH=\sqrt{AH\cdot HB} \Leftrightarrow 2=\sqrt{HB\cdot(8-HB)}$

$4=8HB-HB^2$

$HB^2-8HB+4=0$

$HB_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{1}=4\pm2\sqrt{3}$ ($2\sqrt{3}$)

Пусть $HB=4+2\sqrt{3}$, тогда $AH=4-2\sqrt{3}$

$\angle BAC=\angle HCB$, значит, α и β можно найти из ΔCHB. ~~через sin и cos~~

CB по теор Пифаг $=\sqrt{32+16\sqrt{3}} \Rightarrow HB=\frac{1}{2}CB \Rightarrow \angle\alpha=30^\circ$, ~~$\beta=60^\circ$~~ 0б

неверно.

Задача 6.

Заметим, что среди этих 10 чисел либо 0, либо 10 ех, иначе можно скомпоновать набор, в котором неч. кол-во ечетных. Если все числа неч, то их произв не оканч а ного, т.к. тогда оно бы было чет $\Rightarrow$ все чётны, тогда х произведение $\vdots\ 2^{10}=1024$, значит, оно кратно и 8 тоже. о, по признаку деления на 8, последние 3 цифры числа олжны образовывать число $\vdots\ 8$, а $20 \not\vdots\ 8$. То есть их роизведение не может оканчиваться на 2020.

Ответ: нет. 2б