Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 418040
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету Математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Попов Ярослав Павлович

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Волжский, МОУ СШ № 30 7 класс

Регистрационный номер 992

Вариант задания 8

Дата проведения «29» февраля 2020 г.

Подпись участника

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего
10	15	15	–	–	15					55
10	15	15	–	–	15					55

Шифр 418040

заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

Сумма 55б

Вариант № 8

№1

Пусть в букете x белых, y розовых и z жёлтых хризантем.

Тогда по условию $y = 3x$; $z \vdots y$; $2z = x + 35$; $x + y + z \geq 30$

Из второго $z = y \cdot n = 3xn$, $n \in \mathbb{N}$

$2z = 2 \cdot 3xn = 6xn$

$2z = x + 35$

$\Rightarrow x + 35 = 6xn$ ✓ верно

$x(6n-1) = 35$

Так как решаем в натуральных числах:

$$\left[\begin{array}{l} x = 1;\ 6n - 1 = 35 \\ x = 5;\ 6n - 1 = 7 \\ x = 35;\ 6n - 1 = 1 \\ x = 7;\ 6n - 1 = 5 \end{array}\right.$$

\+

почему? не доказано.

Второй и третий случай невозможны в силу натуральности n.

Для $x = 1$ получаем:

$x = 1$; $n = 6$; $z = 18$; $y = 3$

$x + y + z = 1 + 3 + 18 = 22 < 30$ — не подходит под условие

Для $x = 7$ получаем:

$x = 7$; $n = 1$; $z = y = 21$

$x + y + z = 7 + 21 + 21 = 49$

Ответ: 49

№2

$x^2 + ax - 3a = 0$

По теореме Виета:

$x_1 + x_2 = -a$

$x_1 \cdot x_2 = -3a$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) - 2x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 =$

$= (-a)^2 - 2\cdot(-3a) = a^2 + 6a$

По условию $x_1^2 + x_2^2 = a^2 + 6a = 16$

$a^2 + 6a - 16 = 0$

$D = 36 + 64 = 100$

$$a = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2}$$

$a = 2$ или $a = -8$

Осталось проверить, при каких a исходное уравнение имеет корни:

1) $a = 2$: $x^2 + 2x - 6 = 0$

$D = 4 + 24 = 28 > 0 \Rightarrow$ корни есть

2) $a = -8$: $x^2 - 8x + 24 = 0$

$D = 64 - 4\cdot 24 = 64 - 96 < 0 \Rightarrow$ корней нет

Для $a = 2$ есть корни, а значит, они удовлетворяют теореме Виета, откуда и следует справедливость утверждения задачи

Ответ: $a = 2$

№6

Упорядочим числа из Даниного набора и обозначим их следующим образом:

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_{202}$

Тогда, исходя из результата действий Серёжи, получим

$3a_{202} = 30$ (он прибавил три максимальных числа и вычел 30, и ничего не изменилось)

$a_{202} = 10$

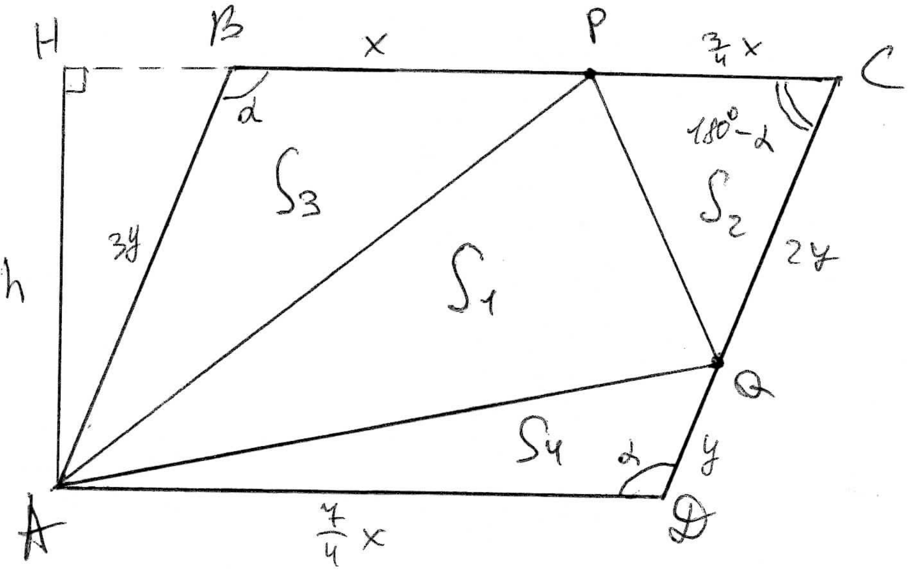
Тогда в наборе Дани 202 числа, каждое из которых не превосходит

10 (так как самое большое равно 10) и их сумма равна ~~[illegible]~~ $2020 = 202 \cdot 10$

Это возможно только если каждое из них равно 10. Значит, самое маленькое тоже равно 10. что доказано.

Ответ: 10

№ 3



Дано:

$ABCD$ — параллелограмм

$P \in BC$

$Q \in CD$

$3PB = 4PC$

$2CD = 3 \cdot CQ$

Найти:

$\frac{S_{APQ}}{S_{CPQ}}$ — ?

Решение:

Пусть $BP = x \Rightarrow PC = \frac{3}{4}x$; ~~[illegible]~~ $DQ = y \Rightarrow CQ = 2y$; $AB = 3y$; $AD = \frac{7}{4}x$

$S_{APQ} = S_1$; $S_{CPQ} = S_2$; $S_{ABP} = S_3$; $S_{AQD} = S_4$; $S_{ABCD} = S$

$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 3y \cdot x \cdot \sin\alpha$, где α — величина угла $\angle ABP$

$S_4 = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DQ \cdot \sin\angle ADQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4}x \cdot y \cdot \sin\alpha$

$$\frac{S_3}{S_4} = \frac{\frac{1}{2} 3xy \sin\alpha}{\frac{1}{2}\frac{7}{4} xy \sin\alpha} = \frac{12}{7} \Rightarrow S_4 = \frac{7}{12} S_3$$

$\angle C = 180^\circ - \angle B$ (как односторонние при параллельных прямых AB и CD)

$\angle C = 180^\circ - \alpha$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x \cdot 2y \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2xy \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{4} xy \sin\alpha$$

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3xy \sin\alpha}{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{4} xy \sin\alpha} = 2 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2} S_3$$

Проведём высоту AH, общую для параллелограма $ABCD$ и ΔABP. Пусть $AH = h$

Тогда $S_3 = \frac{1}{2} h x$; $S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{7}{4} x$

$$\frac{S}{S_3} = \frac{\cancel{1} h \cdot \frac{7}{4} x}{\frac{1}{2} h x} = \cancel{7} \frac{7}{2}$$

$$S = \frac{7}{2} \cdot S_3$$

но: $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_1 + \frac{1}{2} S_3 + S_3 + \frac{7}{12} S_3 =$

$= S_1 + \frac{25}{12} S_3$

$$\frac{7}{2} S_3 = S_1 + \frac{25}{12} S_3$$

$$\cancel{S_1 = \frac{4}{12} S_3 = \frac{1}{3} S_3}$$

$$S_1 = \frac{17}{12} S_3$$

Тогда

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{17}{12} S_3}{\frac{1}{2} S_3} = \frac{17}{6}$$

Ответ: $\frac{17}{6}$