Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1 [illegible]

Шифр 418008
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

8 класс

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Кобенов В.Д.

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Волжский, МОУ СШ №[illegible]

Регистрационный номер 5775

Вариант задания 7

Дата проведения «29» февраля 2020 г.

Подпись участника [illegible]

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

418008

Шифр ____________

заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего
+	+	±	1/2	−	+					
10	15	12	10	0	20					

10 15 12 10 0 20

Σ67 Бухрова

Σ=67

Вариант № 7

Задача 1.

Пусть a - однокомнатных, b - двухкомнатных, c - трёхкомнатных.

По условию:

$$\begin{cases} b = 2a \\ c \vdots a \\ 3c = b + 25 \\ a+b+c \geq 70 \end{cases}$$

Так как $c \vdots a$, то $c = ka$, где $k \in N$.

Подставим $b = 2a$ и $c = ka$ в $3c = b+25$ +

$3c = b+25$

$3ka = 2a + 25 \quad |:a \neq 0$ +

$3k = 2 + \frac{25}{a}$

Так как $3k \vdots 3$ и $2 \equiv 2 (mod\, 3) \Rightarrow \frac{25}{a} \equiv 1 (mod\, 3)$

С другой стороны $\frac{25}{a}$ - число целое $\Rightarrow a$ - делитель $25 \Rightarrow a \in \{1; 5; 25\}$ +

Если $a = 1$:

$a = 1$

$b = 2a = 2$

$3c = 2+25$

$3c = 27$

$c = 9$

~~$c = 10$~~

$a+b+c = 1+2+9 = 12 < 70$

Если $a = 5$:

$\frac{25}{a} = \frac{25}{5} = 5 \not\equiv 1 (mod\, 3)$

Значит $a = 25$.

$a = 25$

$b = 2a = 50$

$3c = 50 + 25$

$3c = 75$

$c = 25$

$a+b+c = 25+50+25 = 100 \geq 70$

Ответ: 100 домов.

Задача 2.

$x^2+ax+2a=0$

$x_1^2+x_2^2=21$ $a=?$

Из теоремы Виетты получаем, что

$\begin{cases} x_1+x_2=-a \\ x_1\cdot x_2=2a \end{cases}$

Заметим, что $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=(-a)^2-2\cdot 2a$

$=a^2-4a.$

Если $x_1^2+x_2^2=21$, то

$a^2-4a=21$

$a^2-4a-21=0$

$D=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot -21\cdot 1=16+84=100$

$a_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{4+10}{2}=\frac{14}{2}=7$

$a_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{4-10}{2}=\frac{-6}{2}=-3$

Но, выполнив подстановку, заметим, что при $a_1=7$

$x^2+7x+14=0$, не имеет корней, так как $D=b^2-4ac$

$=49-4\cdot 14\cdot 1=49-56=-7<0$

Выполнив же подстановку для $a=-3$

$x^2-3x-6=0$

$D=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 6\cdot 1=9+24=33$

$\begin{cases} x_1=\frac{3+\sqrt{33}}{2} \\ x_2=\frac{3-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1^2=\frac{9+6\sqrt{33}+33}{4} \\ x_2^2=\frac{9-6\sqrt{33}+33}{4} \end{cases}$

$$x_1^2+x_2^2=\frac{9+6\sqrt{33}+33+9-6\sqrt{33}+33}{4}=\frac{84}{4}=21.$$

Ответ: При $a=-3$ +

Задача 3.

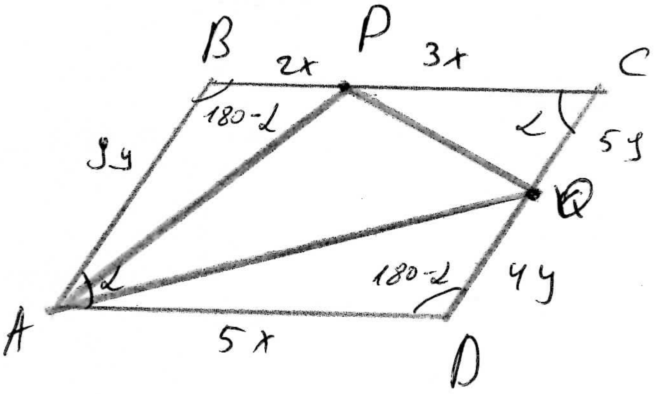
Дано:

параллелограм $ABCD$,

$4CQ=5QD$

$3PB=2PC$

$\frac{S_{APQ}}{S_{PQC}}=?$



$\angle A=\angle C=\alpha \Rightarrow \angle B=\angle D=180-\alpha$

Пусть $BP=2x$, тогда $PC=3x$.

Пусть $CQ=5y$, тогда $QD=4y$.

$$S_{PQC}=\frac{1}{2}ab\sin\alpha=\frac{3x\cdot 5y\cdot\sin\alpha}{2}=7{,}5xy\sin\alpha \; +$$

$$S_{ABCD}=ab\sin\alpha=AB\cdot AD\cdot\sin\alpha\;(AB=CD=9y;\ AD=BC=5x)=$$

$$9y\cdot 5x\cdot\sin\alpha=45xy\sin\alpha.$$

$$S_{ABP}=\frac{2x\cdot 9y\cdot\sin(180-\alpha)}{2}=\frac{2x\cdot 9y\cdot\sin\alpha}{2}=9xy\sin\alpha \; +$$

$$S_{AQD}=\frac{5x\cdot 4y\cdot\sin(180-\alpha)}{2}=\frac{5x\cdot 4y\cdot\sin\alpha}{2}=10xy\sin\alpha \; +$$

$$S_{APQ}=S_{ABCD}-S_{ABP}-S_{AQD}-S_{PCQ}=45xy\sin\alpha-9xy\sin\alpha-10xy\sin\alpha-7{,}5xy\sin\alpha$$

$$=18{,}5xy\sin\alpha \; +$$

$$\frac{S_{APQ}}{S_{PQC}}=\frac{18{,}5xy\sin\alpha}{7{,}5xy\sin\alpha}=\frac{18{,}5}{7{,}5}=\frac{185}{75}=\frac{\overset{37}{35}}{15}=\frac{7}{3}$$

верн

Ответ: $\frac{7}{3}$ неверн

12б

Задание 6.

Пусть исходные числа $a_1, a_2 \ldots$ и $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \ldots \geq a_{158}$

$a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_{158} = 1580$

После преобразований Серёжи:

$3a_1 + a_2 \ldots + a_i - 20 + a_{i+1} \ldots + a_{158} = 1580$

Значит:

$$-\begin{cases} 3a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_{158} = 1600 \\ a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_{158} = 1580 \end{cases}$$

$2a_1 = 20$

$\boxed{a_1 = 10}$ +

С другой сторон $a_1 = 1580 - (a_2 + a_3 \ldots + a_{1580})$

$10 = 1580 - (a_2 + a_3 \ldots + a_{158})$

$-1570 = -(a_2 + a_3 \ldots + a_{158})$

$1570 = a_2 + a_3 + a_4 \ldots + a_{158}$

Так как $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \ldots \geq a_{158} \Rightarrow a_{158} \leq a_{157} \ldots \leq a_2 \leq 10$

$1570 = \underbrace{a_2}_{\leq 10} + \underbrace{a_3}_{\leq 10} + \underbrace{a_4}_{\leq 10} \ldots + \underbrace{a_{158}}_{\leq 10}$

Сумма $(a_2 + a_3 + a_4 \ldots + a_{158}) \leq 157 \cdot 10 \Rightarrow \leq 1570$

Но $(a_2 + a_3 + a_4 \ldots + a_{158}) = 1570$

Это возможно только если все числа $= 10 \Rightarrow a_{158} = 10$

Ответ: 10

+

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 418008

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 7

Задача 4.

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-2x-y+8x-12)\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-x}}=0 & (1) \\ 2x+y-a=0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\dfrac{(y^2-2x-y+8x-12)\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-x}}=0$

ОДЗ: $\sqrt{4-x}\neq 0$ $\quad x+1\geq 0 \quad 4-x>0$

$x\neq 4 \quad x\geq -1 \quad x<4 \quad \Rightarrow \quad x\in[-1;4)$

$(y^2-2x-y+8x-12)\sqrt{x+1}=0$

$(y-4)(y-2x+3)\sqrt{x+1}=0$

$$\left[\begin{array}{l} y=4 \\ y=2x-3 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y=a-2x \\ \left[\begin{array}{l} y=4 \\ y=2x-3 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases}$$

(2) $2x+y-a=0$

$y=a-2x$

Решим систему уравнений графически,

с учётом ОДЗ $x\in[-1;4)$

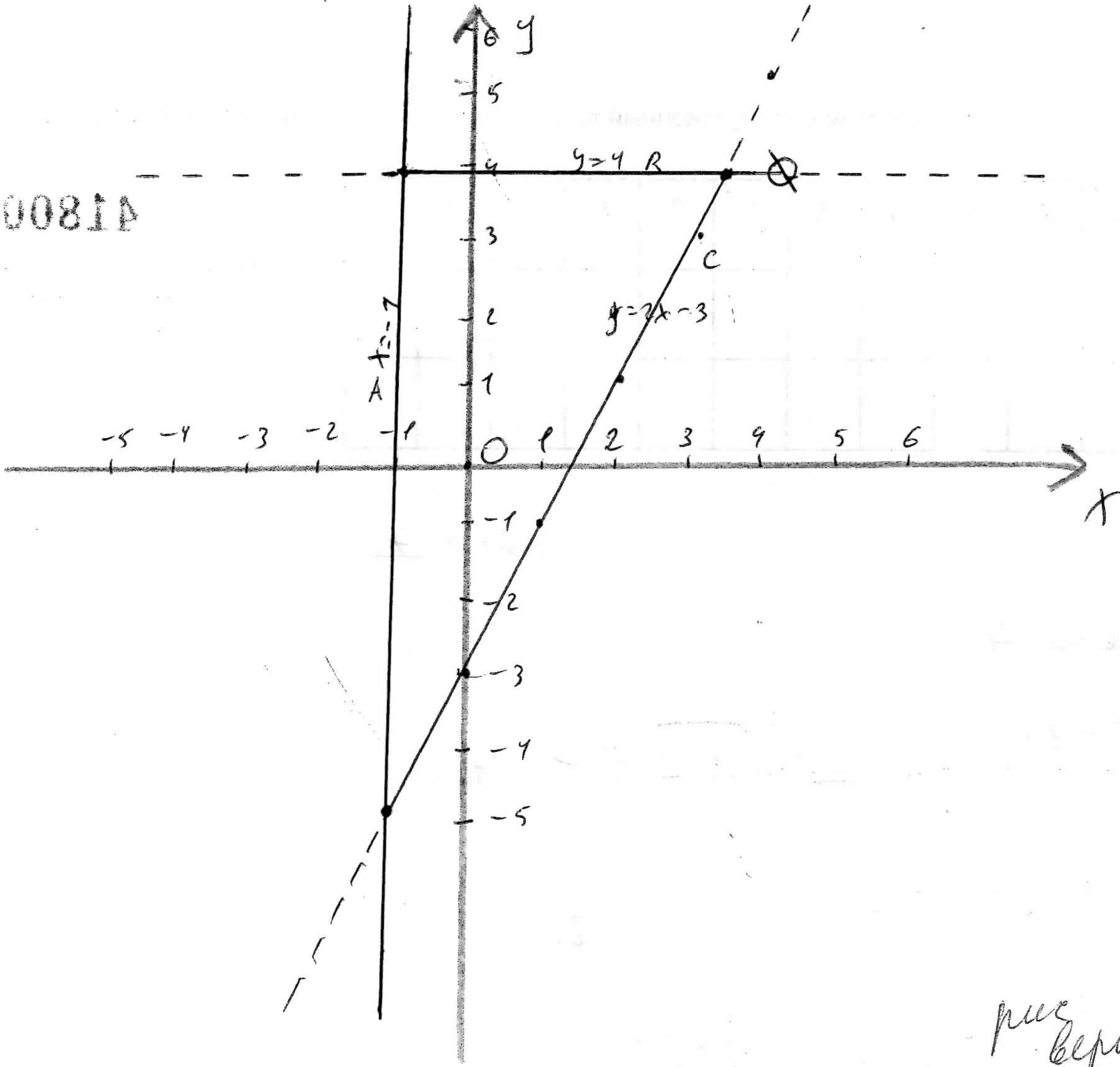


рис верный

~~Прямо~~ Система будет иметь два решения, когда графики прямой $y = a - 2x$ будет пересекать данный ровно в двух точках. Тангенс наклона этой прямой $= -2$, а пересекает ось Oy в точке a.

Назовём графики $x = -1$ за A, $y = 4$ за B и $y = 2x - 3$ за C

Очевидно что прямая $y = a - 2x$ обязательно пересекает прямую A.

Заметим, что графики C находится ниже графика B $\Rightarrow$ если $y = a - 2x$ пересечёт B, то и пересечёт C, пока C ниже B, и A соответственно

почему рассм. этот пр.?

На промежутке $x \in [3; 4)$ графики пересечёт прямые A и C

Найдём a:

$4 = a - 2 \cdot 3$, $4 = a - 6$, $a = 10$

$4 = a - 2 \cdot 4$, $4 = a - 8$, $a = 12$

? $\Rightarrow$ $a \in [10; 12)$

Также на промежутке у $y \in [4; -5]$ $y = -2x + a$
пересечёт прямые A и C

? почему

Найдём a: $4 = a - 2 \cdot -1$ $\quad -5 = a - 2 \cdot -1$

$4 = a + 2 \quad -5 = a + 2$

$a = 2 \quad a = -3$ ⇒

⇒ $a \in [-3; 2]$

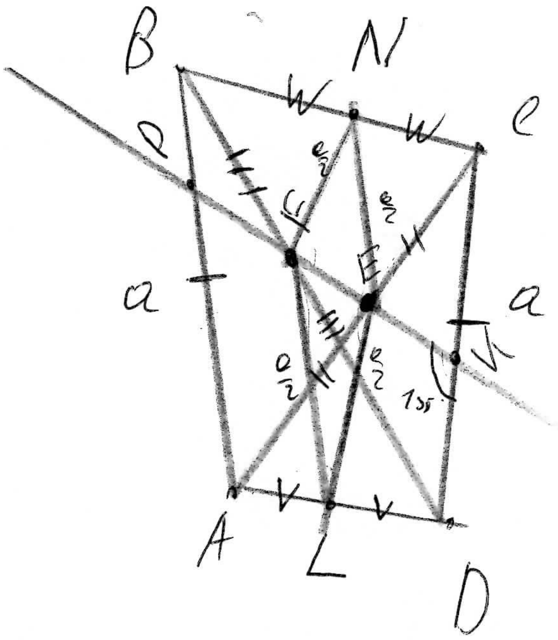
Во всех остальных случаях двух пересечения не будет.

Ответ: $a \in [-3; 2] \cup [10; 12)$

10б

Задача 5.

Дано:
ABCD;
AB=CD;
∠DKP=105



Пусть AB=CD=a

Отметим середину AD – L
и середину BC – N

Тогда FL – ср. линия ⇒ $FL = \frac{a}{2}$ и FN – ср. лин ⇒ $FN = \frac{a}{2}$

С другой стороны NE тоже ср. лин, как и LE
($NE = \frac{a}{2}$, $LE = \frac{a}{2}$)

LFNE – ромб

продолжения нет