Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1 лист

Шифр 318018
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету Математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Самсонов Ярослав Николаевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Иваново
МБОУ „лицей N 33"

Регистрационный номер 10333

Вариант задания 5

Дата проведения «24» февраля 2020 г.

Подпись участника

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего
10б	15б	15б	5б	20б	20б					85б
10	15	15	5	20	20					85

10 15 15 5 20 20
+1 лист

Шифр 318018

заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

$\Sigma = 85$

Вариант № 5

Задача 1.

Пусть было всего x дней

Тогда, $0,8x$ – тихие дни

10

Тогда, $0,64x$ – кол-во дней которые назвали тихими приборы

Тогда, $0,7 \cdot 0,8x = 0,56x$ – кол-во ~~которые~~ дней которые были тихими и которые приборы назвали тихими.

Тогда, $0,64x - 0,56x = 0,08x$ – кол-во дней, когда дни были сейсмоактивны, но приборы назвали их тихими.

Т.к. $0,8x$ – тихие дни, то $0,2x$ – активные дни.

Тогда, $0,08x / 0,2x = 0,4 = 40\%$ – кол-во дней в процентах, которые активны, но приборы не смогли верно спрогнозировать.

Ответ: 40%.

Задача 2.

$$\begin{cases} x^2 + xy = 10, \\ y^2 + xy = 15 \end{cases}$$

$$y^2 + xy - (x^2 + xy) = y^2 - x^2 = (x+y)(y-x) = 15 - 10 = 5$$

$$x^2 + xy + y^2 + xy = (x+y)^2 = 25$$

$x+y = -5$ или $x+y = 5$

$$\begin{cases} |x+y|=5, \\ (x+y)(-x+y)=5 \end{cases}$$

1) $x+y=5$ Тогда, $(x+y)(y-x)=5\cdot(y-x)=5$

$y-x=1$

$y=x+1$

$x+y=5$

$x+(x+1)=5 \rightarrow x=2, y=3$

2) $x+y=-5$

$(x+y)(y-x)=-5(y-x)=5$

$y-x=-1$

$x=y+1$

$x+y=(y+1)+y=-5$

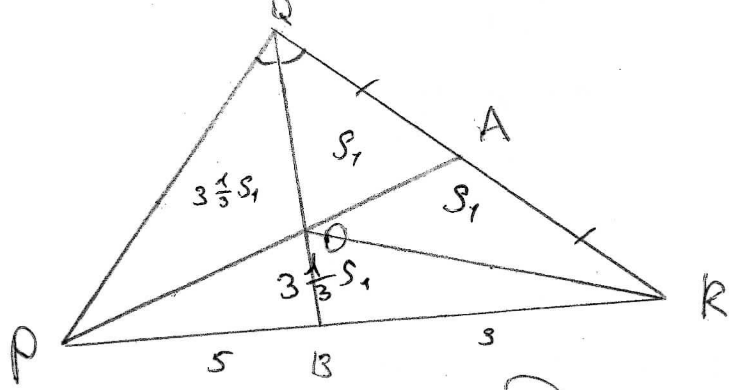
$2y=-6$

$y=-3 \quad x=-2$

15

Ответ: $x=2, y=3$; $x=-2, y=-3$.

Задача 3.



Дано:
$\triangle PQR$,
PA – медиана
QB – биссектриса
$3PQ=5QR$
Найти:
$\frac{S_{PQR}}{S_{PQO}}$

Решение

Т.к. $3PQ=5QR$, то $\frac{PQ}{QR}=\frac{5}{3}$

Т.к. QB – биссектриса, то $\frac{PB}{BR}=\frac{PQ}{QR}=\frac{5}{3}$

Пусть $S_{AOR}=S_1$

Тогда, $S_{AOQ}=S_{AOR}=S_1$ (OA – медиана).

Т.к. Q – общая в $\triangle PQB$ и $\triangle BQR$ и $B \in PR$, то $\frac{S_{PQB}}{S_{BQR}}=\frac{PB}{BR}=\frac{5}{3}$

Аналогично $\frac{S_{POB}}{S_{BOR}}=\frac{5}{3}$

Тогда, $\frac{S_{PQO}}{S_{QOR}}=\frac{5}{3}$

Т.к. $S_{QOR}=2S_1$, то $S_{PQO}=\frac{5}{3}S_{QOR}=3\frac{1}{3}S_1$

Аналогично $\frac{S_{PQO}}{S_{POR}} = \frac{QA}{AR} = \frac{1}{1}$

Значит, $S_{POR} = 3\frac{1}{3}S_1$

Тогда, $S_{PQR} = 3\frac{1}{3}S_1 + 3\frac{1}{3}S_1 + 2S_1 = 8\frac{2}{3}S_1$

И $S_{PQO} = 3\frac{1}{3}S_1$

$\frac{S_{PQR}}{S_{PQO}} = \frac{8\frac{2}{3}S_1}{3\frac{1}{3}S_1} = \frac{\frac{26}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{26}{10} = 2,6$

15

Ответ: S_{PQR} в 2,6 раза больше S_{PQO}.

Задача 4.

Знаменатель не должен быть равен 0. Найдем такие a и x при которых это неверно.

$ax^2 - 7x^2 - 10ax + 70x + 21a - 147 = 0$

$a(x^2 - 10x + 21) - 7(x^2 - 10x + 21) = 0$

$(a-7)(x^2 - 10x + 21) = 0$

$a - 7 = 0$

$a = 7$

$x^2 - 10x + 21 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 \cdot x_2 = 21 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 7 \end{array} \right.$

Тогда, выражение имеет смысл, когда $a \neq 7$, $x \neq 3$, $x \neq 7$.

Т.к. значение уравнение $- 0$, то

$\sqrt{x-1} \cdot (|x^2 - 10x + 16| - a) = 0$

$\sqrt{x-1} = 0$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

$|x^2 - 10x + 16| - a = 0$

$x^2 \geq 0$

$16 > 0$

Тогда, модуль меняет только знак у $-10x$

$x^2 \pm 10x + 16 - a = 0$

$D = (\pm 10)^2 - 4 \cdot (16 - a) = 100 - 64 + 4a = 36 + 4a$

Т.к. решение $x = 1$ есть при любом значении a (кроме $a = 7$), то уравнение $x^2 \pm 10x + 16 - a = 0$ должно иметь 2 решения.

Значит, $D > 0$.

$36 + 4a > 0$

$4a > -36$

$a > -9$

Если решением $x^2 \pm 10x + 16 - a = 0$ — является $x = 7$ или $x = 3$, то

$|7^2 - 10 \cdot 7 + 16| - a = 0$

$|\underbrace{49 - 70}_{-21} + 16| - a = 5 - a = 0$, $a = 5$

$|3^2 - 10 \cdot 3 + 16| - a = |\underbrace{9 - 30}_{-21} + 16| - a = 5 - a = 0$

$a = 5$

Значит, $a \neq 5$.

Найдем значения a, когда подкоренное больше или равно 0 при всех x, которые являются решением $|x^2 - 10x + 16| - a = 0$, где значение $\sqrt{x-1}$ —

$a > -9$, $a \neq 7$, $a \neq 5$.

$D = 36 + 4a$

$x = \frac{\pm 10 + \sqrt{36+4a}}{1 \cdot 2}$, если $x^2 - 10x + 16 > 0$, то

$x = \frac{+10 + \sqrt{36+4a}}{2} = 5 + \frac{\sqrt{36+4a}}{2}$ $\left(\frac{\sqrt{36+4a}}{2} \geq 0\right)$, значит

$x \geq 5$. $x - 1 \geq 4$.

Если $x^2 - 10x + 16 < 0$, то $x = \frac{-10 + \sqrt{36+4a}}{2} =$

$= -5 + \frac{\sqrt{36+4a}}{2}$

$-5 + \frac{\sqrt{36+4a}}{2} - 1 \geq 0$

$\frac{\sqrt{36+4a}}{2} \geq 6$, значит $a \geq 0$, т.е. при $a < 0$, одно из решений $x^2 \pm 10x + 16 - a = 0$ — делает $\sqrt{x-1}$ — комплексным.

Ответ: при $a \geq 0$, кроме $a = 7$ и $a = 5$.

5

Задача 6.

Пусть в Гондоре — x людей, а в Нуменоре — y.

Тогда, эти x людей Гондора в сумме могут прожить $64x$ лет, а y людей Нуменора — $92y$.

Если объединить население, то они проживут $(x+y)85$ лет

$\frac{64x + 92y}{x+y} = 85$

$\frac{64(x+y) + 28y}{x+y} = 64 + \frac{28y}{x+y} = 85$

$\frac{28y}{x+y} = 21$ $\qquad 28y = 21x + 21y$

$7y = 21x$ $\qquad y = 3x$

Ответ: в 3 раза меньше.

20

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

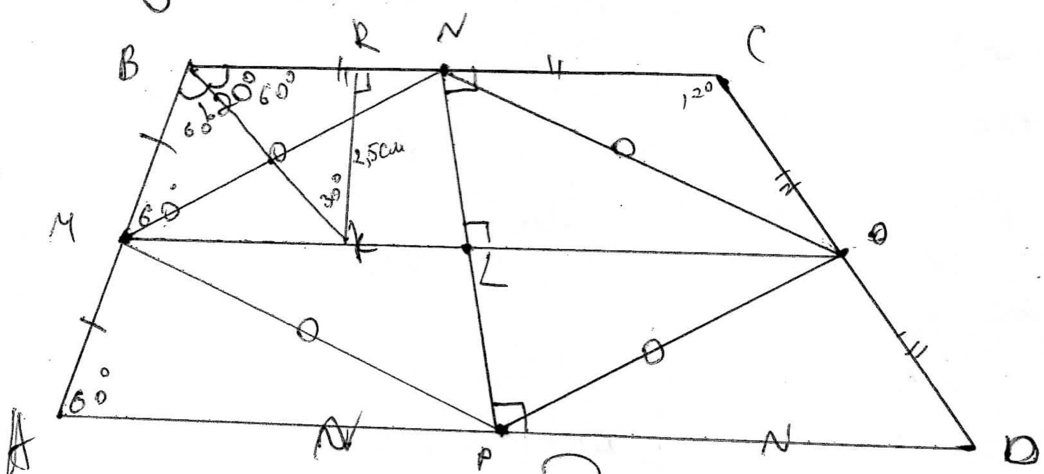
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего

Шифр 318018

заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

Вариант № 5

Задача 5.



BC = 8см
высота = 5см
∠ABC = 120°

Решение.

Т.к. MNOP – ромб, то MN = NO = OP = PM, NP ⊥ MO, MO – ср. линия трапеции.

Т.к. NP ⊥ MO, MO – ср. линия, то MO ∥ BC ∥ AD, NP ⊥ BC, NP ⊥ AD

Значит, NP – высота трапеции, NP = 5см

Найдем MO.

Д.п. BK – биссектриса ∠ABC, K ∈ MO

Т.к. ∠BNL = ∠LNC = 90°, MNOP – ромб, то ∠MNL = ∠LNO (по свойству ромба), значит, ∠BNM = ∠CNO.

Тогда, △BNM = △CNO (по двум сторонам и углу между ними: BN = NC, MN = NO, ∠BNM = ∠CNO).

Тогда, BM = CO = AM = OD.

Т.к. MO – ср. линия, то ∠BMO = ∠MAD (как соотв. при MO ∥ AD, и сек. AB)

Т.к. $\angle ABC = 120°$, то $\angle BAD = 180 - 120 = 60°$

Тогда, $\angle BMO = 60°$.

Т.к. Bk бис., то $\angle MBk = \frac{120°}{2} = 60°$

Тогда, $\angle MkB$ – тоже равен $60°$

Значит, $\triangle MBk$ – равносторонний.

Тогда, $MB = Bk = Mk$.

Т.к. $BM = CD$, то $Bk = CO$

~~Тогда,~~ Т.к. $\angle MkB = 60°$, то $\angle BkO = 120°$.

Т.к. $AB = CD$, то $\angle ABC = \angle BCD = 120°$.

Тогда, т.к. $MO \parallel BC$, то $\angle MOC = 180° - 120° = 60°$ (как односторонние)

Т.к. $\angle BkO = 120°$, $\angle MOC = 60°$, то $Bk \parallel CO$ (односторонние углы при сек. MO)

Значит, BkOC – параллелограмм по опр.

Тогда, $kO = BC = 6$ см.

Д.к. высота kR

Т.к. MO – ср. линия, то $kR = \frac{1}{2} BH = 2{,}5$ см

Т.к. Bk – биссектр. $\angle kBC = 60°$ $(\frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 120°)$

Значит, $\angle BkR = 180 - 90 - 60 = 30°$.

Значит, $BR = \frac{1}{2} Bk$.

Пусть, $BR = x$.

Тогда, $BR^2 + kR^2 = Bk^2$

$x^2 + (2{,}5)^2 = (2x)^2$

$(2{,}5)^2 = 3x^2$

$6{,}25 = 3x^2$

$x^2 = 2 + \frac{0{,}25}{3} = 2\frac{1}{12} = \frac{25}{12}$

$x = \sqrt{\frac{25}{12}} = \frac{5}{\sqrt{12}}$ см

Тогда, $2x = \frac{10}{\sqrt{12}}$ см.

Тогда, т.к. $Bk = Mk$, то $Mk = \frac{10}{\sqrt{12}}$ см $= \frac{10\sqrt{12}}{12} = \frac{5}{6}\sqrt{12}$ см

Тогда, $MO = Mk + kO = \frac{5}{6}\sqrt{12} + 6$ см

Тогда, $S_{MNOP} = \frac{1}{2} MO \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot (\frac{5}{6}\sqrt{12} + 6) \cdot 5 = (\frac{5}{6}\sqrt{12} + 6) \cdot 2{,}5 =$

$= (\frac{12{,}5}{6}\sqrt{12} + 15)$ см^2 $= (\frac{25}{6}\sqrt{3} + 15)$ см^2

Ответ: площадь ромба — $15 + \frac{25}{6}\sqrt{3}$ см^2