+1 чистовик, Таб

216732

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр ____________________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Лоскутников Александр Леонидович

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Москва, школа №121

Регистрационный номер 296

Вариант задания 4

Дата проведения “16” февраля 2020 г.

Подпись участника ____________________

70 (семьдесят)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12	16	20	–	10					
										70

216732

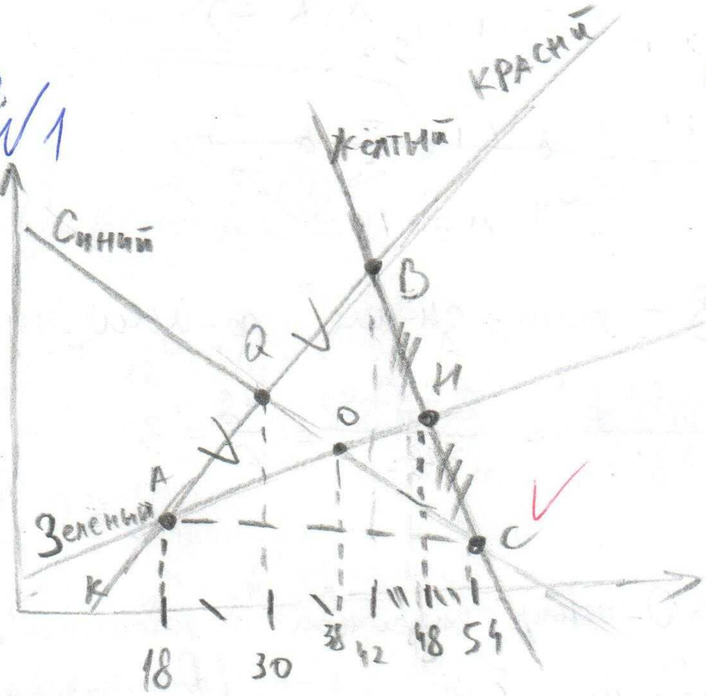
Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 4

32

№1



в т. О синий шф разминулся с зелёным.

$\triangle ABC$

CQ и AH – медианы, то – т пересечения

$\Rightarrow OH = 2AO$

$AH = 3 \cdot OH$

$AH = 48_c - 18_c = 30_c$ $3 \cdot OH = 30_c$

$OH = 10_c$

$48_c - 10_c = 38_c$

12

Ответ: на 38ой секунде.

№2

$$\frac{3f(1) - 3f(0) + f(-1)}{f(0) - f(-2)} \to min$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $f(x) \geq 0$

$b > 2a$

$f(x) \geq 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow D \leq 0 \Rightarrow b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow c \geq \frac{b^2}{4a}$

$c_{min} = \frac{b^2}{4a}$

$$\frac{3f(1) - 3f(0) + f(-1)}{f(0) - f(-2)} = \frac{3a + 3b + 3c - 3c + a - b + c}{c - 4a + 2b - c} = \frac{4a + 2b + c}{2(b - 2a)}$$

$$= \frac{4a + 2b + \frac{b^2}{4a}}{2(b - 2a)} = \frac{16a + 8b + \frac{b^2}{a}}{8(b - 2a)} = \frac{16 + 8\frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}}{8(\frac{b}{a} - 2)}$$

Пусть $\frac{b}{a}=k$, $k>2$ т.к $b>2a$

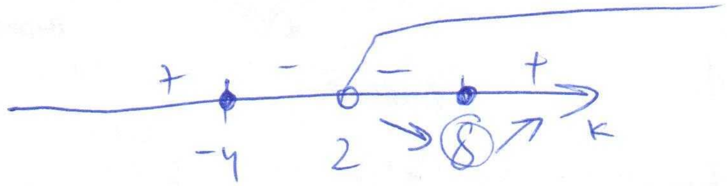
$$\frac{16+8k+k^2}{8(k-2)}=g(k) \quad g'(k)=\frac{(8+2k)(8k-16)-(k^2+8k+16)8}{64(k-2)^2}$$

$$=\frac{(8+2k)(k-2)-(k^2+8k+16)}{8(k-2)^2}=\frac{k^2-4k-32}{8(k-2)^2}=\frac{(k+4)(k-8)}{8(k-2)^2}$$

$k^2-4k-32=(k+4)(k-8)$

по т. Виета

$$\begin{cases} k_1+k_2=4 \\ k_1k_2=-32 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1=8 \\ k_2=-4 \end{cases}$$ ✓

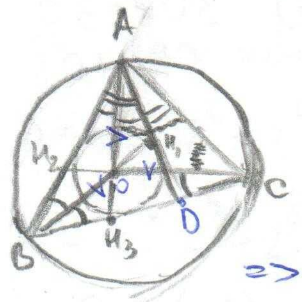


при $k=8$ – min зн-ние ф-ции.

Ответ: 3 ✓ 12

$$\frac{16+8k+k^2}{8(k-2)}=\frac{16+8\cdot 8+8^2}{8(8-2)}=\frac{2+8+8}{8-2}=\frac{18}{6}=3$$

№4



Пусть $\angle ABO=\alpha$ т. O – центр вписанной и описанной окр.
$\Rightarrow$ т. O – т. пересечения биссектрис. (Доп. построение CH_1, AH_3, BH_2 – биссектр.)
$\Rightarrow \angle ABO=\angle OBC=\alpha$

$OB=OC=OA$ – радиусы опис. окр. O $\Rightarrow \triangle BOA$ – равнобедр.
$\Rightarrow \angle ABO=\angle BAO=\alpha$, AH_3 – биссектр. $\Rightarrow \angle OAD=\angle BAO=\alpha$

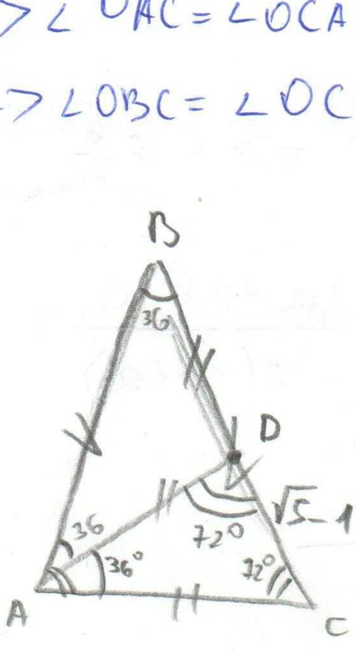
AD – биссектр $\triangle BAC \Rightarrow \angle BAD=\angle DAC=2\alpha$; $\triangle AOC$, $AO=OC$ – $\triangle$к равнобедренный
$\Rightarrow \angle OAC=\angle OCA=\angle OAD+\angle DAC=3\alpha$; $\triangle BOC$ – равнобедр. $BO=OC$
$\Rightarrow \angle OBC=\angle OCB=\alpha \Rightarrow \angle C=\angle BCO+\angle OCA=4\alpha \Rightarrow \angle C=\angle B=\angle A=180$

$\angle B=\angle ABO+\angle OBC=2\alpha$

$\angle A=\angle BAD+\angle DAC=4\alpha$

$10\alpha=180^\circ$

$\alpha=18^\circ$ ✓



$\angle BAD=\angle ABD \Rightarrow \triangle ADB$ – равнобедр. $BD=DA$

~~BD = DA = AC~~

$\angle ADC=\angle ACD \Rightarrow \triangle ADC$ – равнобедр, $AD=AC$

$\angle A=\angle C \Rightarrow \angle ABC$ – равнобедр $AB=BC$

$\angle B=\angle DAC$

$\angle A=\angle C=\angle ADC=\angle ACD$ $\Big| \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADC$ (по 3м углам) ✓

Пусть $BD = a$, $DC = \sqrt{5} - 1 = b$ $(BD = AC)$

$\Rightarrow$ $\frac{AD}{BC} = \frac{DC}{AC} = \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$

$a^2 = ab + b^2$

$a^2 - ba - b^2 = 0$

$D = b^2 - 4 \cdot -1 \cdot b^2 = 5b^2$

$a_1 = \frac{b + b\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1 + (\sqrt{5}-1)\sqrt{5}}{2} = \frac{4}{2} = 2$ $\qquad a_2 = \frac{b - b\sqrt{5}}{2}$

$a_2 < 0$, не удв усл. $a > 0$

20

Ответ: $AC = 2$

№3

Обозначения:

чёт – чётное число

нечёт. – нечётное число

нат. – натуральное число

$2^8 + 2^{12} + 2^{14} + 5 \cdot 2^n = M^2 \quad n \in N, M \in N$

① $n \geq 8$

$2^8(1 + 2^4 + 2^6 + 5 \cdot 2^{n-8}) = M^2$

$2^8(81 + 5 \cdot 2^{n-8}) = M^2$

$2^8 = (2^4)^2 \Rightarrow 81 + 5 \cdot 2^{n-8} = T^2, T \in N$

$81 + 5 \cdot 2^{n-8} = T^2$, 2^{n-8} – чёт. число, $5 \cdot 2^{n-8}$ – чёт, $81 + 5 \cdot 2^{n-8}$ – нечёт.

$\Rightarrow T^2$ – кв-т нечёт. нат. числа

1) $n = 8$ ⊖

$81 + 5 = 86$ – не является кв-том нат. числа

T^2 – кв-т нечёт. нат. числа

$\Rightarrow 81 + 5 \cdot 2^{n-8} = (2k+1)^2$, $(2k+1) \in N$,

$81 + 5 \cdot 2^{n-8} = 4k^2 + 4k + 1$

$5 \cdot 2^{n-8} = 4k^2 + 4k - 80$

1 2) $n \geq 10$ 1:4 $n = 10$ —

$5 \cdot 2^{n-10} = k^2 + k - 20$ $k^2+k-20=(k+5)(k-4)$ $81 + 20 = 101$ – не кв-т нат. числа

по т. Виета

$5 \cdot 2^{n-10} = (k+5)(k-4)$ $\begin{cases} k_1+k_2=-1 \\ k_1 \cdot k_2 = -20 \end{cases}$ $\begin{cases} k_1=-5 \\ k_2=4 \end{cases}$

$(k+5)$ и $(k-4)$ – разной чётности $\Rightarrow$ $(k+5)$ или $(k-4)$ делители "5"

$k+5=1$ $k=-4$ не удв усл. $(2k+1) \in N$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k+5=1 \\ k+5=5 \\ k-4=1 \\ k-4=5 \end{array}\right.$

$k+5=5$, $k=0$ не удв усл. $(2k+1) \in N$

$k-4=1$, $k=5$ $5 \cdot 2^{n-10} = 10$, $2^{n-10} = 2$ $n = 11$ ✓

$k-4=5$, $k=9$ $5 \cdot 2^{n-10} = 14 \cdot 5$ $2^{n-10} = 14$ 14 – не явл. кв-т нат. числ

3) $n = 9$ $81 + 5 \cdot 2 = 91$ – не явл. кв-том нат. числа.

1 2) $n < 8$

$2^n(2^{8-n} + 2^{12-n} + 2^{14-n} + 5) = M^2$ ✓

2^n – кв-т нат. числа $\Rightarrow$ n – чётн.

$n=6$ $2^2 + 2^6 + 2^8 + 5 = 4 + 64 + 256 + 5 = 329$ – не явл. кв-том нат. числа

$n=4$ $2^4 + 2^8 + 2^{10} + 5 = 16 + 256 + 1024 + 5 = 1301$ – не явл. кв-том нат. числа

1 $n=2$ $2^6 + 2^{10} + 2^{12} + 5 = 64 + 1024 + 4096 + 5 = 5189$ – не явл. кв-том нат. числа

✓ 16

Ответ: $n = 11$

№6 – следующий лист.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

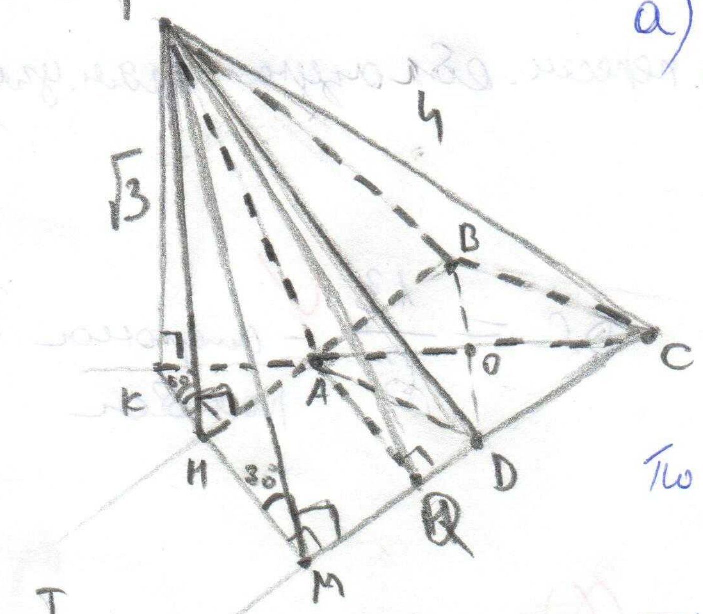
216732

Шифр

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

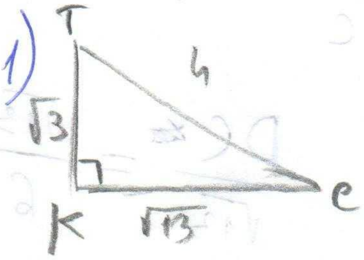
Вариант № 4

№6



а) TH и TM - высоты граней ATB и DTC соответственно.

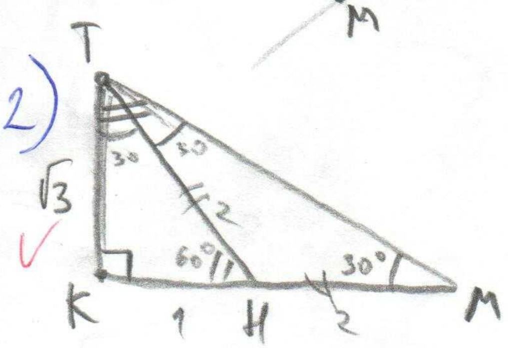
1)



TK - высота пир ABCDT $\Rightarrow \angle K = 90^0$

По т. Пифагора $KC = \sqrt{TC^2 - TK^2} = \sqrt{16-3} = \sqrt{13}$

2)



$\triangle TKH$, $\angle K = 90^0$, $\angle H = 60^0 \Rightarrow \angle KTH = 30^0$

$TK = \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\sin 60^0 = \frac{TK}{TH}$ $TK = 2$

по св-ву $\angle 30^0$ в прямоуг $\triangle$ке - (св-во 1)

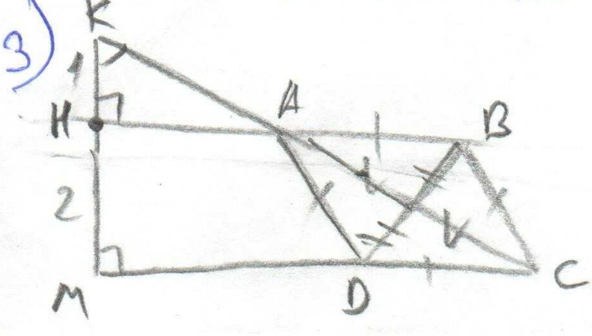
$KH = \frac{1}{2} TH = 1$

$\angle M = 30^0 = \angle T = 60^0$, $\angle KTH = 30^0 \Rightarrow \angle HTM = 30^0$

$\Rightarrow \triangle THM$ - равнобедр $\Rightarrow TH = HM$

$\angle M = 30$, $\angle K = 90^0$ по св-ву 1 $TM = 2\sqrt{3}$

3)



$KH = 1$, $HM = 2$, $KC = \sqrt{13}$

$\Rightarrow KM = 3$, $\angle M = 90^0$

по т. Пифагора

$MC = \sqrt{13 - 9} = \sqrt{4} = 2$

$\triangle KHA \sim \triangle KMC$ (по двум углам, $\angle K$ - общ, $\angle KHA = \angle KMC = 90^\circ$)

$\Rightarrow \frac{KH}{KM} = \frac{1}{3} = \frac{KA}{\sqrt{13}} \Rightarrow KA = \frac{\sqrt{13}}{3}$ ✓

т. O - точка пересечения диаг. ромба $\Rightarrow AO = OC$

$AC = KC - KA = \sqrt{13} - \frac{\sqrt{13}}{3} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$ ✓

$\Rightarrow KA = AO = OC$

$2AO = AC \Rightarrow AO = \frac{AC}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

$\triangle COD \sim \triangle CMK$ (по двум углам, $\angle C$ - общ. $\angle O = \angle M = 90^\circ$)

($\angle O = 90^\circ$, т.к диаг ромба при пересеч. образуют прям. угл)

$\Rightarrow \frac{DC}{KC} = \frac{OC}{MC}$

$\frac{DC}{\sqrt{13}} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{3}}{2}$ $\quad \frac{DC}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$ $\quad DC = \frac{13}{6}$ ✓ - сторона ромба

Ответ: а) $DC = \frac{13}{6}$ ✓

б) Док. и. $AQ \perp MC$

10