Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1

216057

Шифр ____________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Васильев А.Г.

Город, № школы (образовательного учреждения) Щёлково МАОУ СОШ №12.

Регистрационный номер 998

Вариант задания №4

Дата проведения “16” февраля 2020г.

Подпись участника ____________

75 (семьдесят пять)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12	16	20		15					
										75

216057

Шифр ____________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 4

N 3

$2^8+2^{12}+2^{14}+5\cdot 2^n=N^2$ N – натуральное число

рассмотрим $n<8$ n – натуральное число

$2^n(\underbrace{2^{8-n}+2^{12-n}+2^{14-n}+5}) = N^2$.

чётное нечётное, значит подойдут только чётные значения n $(2;4;6)$

проверим их:

1) $n=2$.

$4(64+1024+4096+5)=4\cdot 5189=2^2(72^2+5)\neq N^2$,

значит $n\neq 2$.

2) $n=4$.

$16(16+256+1024+5)=16\cdot 1301=4^2(36^2+5)\neq N^2$.

значит $n\neq 4$.

3) $n=6$

$64(4+64+256+5)=64\cdot 329=8^2(18^2+5)\neq N^2$.

значит $n\neq 6$

рассмотрим $n \geq 8$

$$2^8(1+2^{12-8}+2^{14-8}+5\cdot 2^{n-8})=N^2.$$

$$2^8(81+5\cdot 2^{n-8})=N^2$$ т.к. $2^8=(2^4)^2$, и $\underbrace{81+5\cdot 2^{n-8}}_{\text{нечётное}}$, то $N^2=(2l+1)^2$

$$81+5\cdot 2^{n-8}=(2l+1)^2$$

$$81+5\cdot 2^{n-8}=4l^2+4l+1.$$

$$5\cdot 2^{n-8}=4l^2+4l-80 \quad | :2^2$$

$$5\cdot 2^{n-10}=l^2+l-20$$

нужно проверить $n=8$; $n=9$; $n=10$

1) $n=8$
$81+5\cdot 2^{8-8}=86\neq N^2.$

2) $n=9$
$81+5\cdot 2^{9-8}=91\neq N^2$

3) $n=10$
$81+5\cdot 2^{10-8}=101\neq N^2.$

разложим на множители правую часть

$l^2+l-20=0$

$D=1+80=81$

$l_1=5 \quad l_2=-4.$

$$5\cdot 2^{n-10}=(l-5)(l+4)$$

приравняем каждый из множителей справа, к делителям свободного члена.

1) $l-5=5$
$l=10$
проверим
$5\cdot 2^{n-10}=5\cdot 14$
не подходит.

2) $l-5=1.$
$l=6$
проверим
$1\cdot 10=5\cdot 2^{n-10}$
$2=2^{n-10}$
$n=11$

3) $l+4=1.$
$l=-3$
$1\cdot(-8)=5\cdot 2^{n-10}$
не подходит

4) $l+4=5$
$l=1$
$5\cdot(-4)=5\cdot 2^{n-10}$
не подходит.

$n>11$ – ?

16

Ответ: $n=11.$

№2

$$\frac{3f(1)-3f(0)+f(-1)}{f(0)-f(-2)} \qquad b>2a$$

если функция $f(x)=ax^2+bx+c$ принимает неотрицательные значения, то $D\le 0$

$$b^2-4ac\le 0$$

$$c\geq \frac{b^2}{4a}$$

$$\frac{3f(1)-3f(0)+f(-1)}{f(0)-f(-2)}=\frac{3a+3b+3c-3c+a-b+c}{c-4a+2b-c}=\frac{4a+2b+c}{2b-4a}$$

подставим c

$$\frac{4a+2b+c}{2b-4a}\geq\frac{4a+2b+\frac{b^2}{4a}}{2b-4a} \qquad \frac{4a+2b+\frac{b^2}{4a}}{2b-4a}=\frac{16a^2+8ab+b^2}{4a(2b-4a)}=$$

$$=\frac{16a^2+8ab+b^2}{8ab-16a^2}=\frac{a^2\left(16+8\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)}{a^2\left(8\frac{b}{a}-16\right)}=\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2+8\frac{b}{a}+16}{8\frac{b}{a}-16}$$

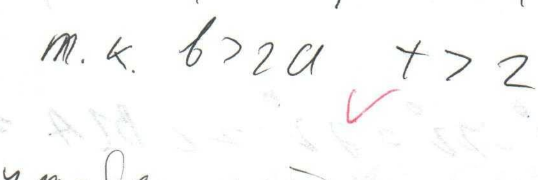
пусть $\frac{b}{a}=t$ т.к. $b>2a$ $t>2$.

$$\frac{t^2+8t+16}{8t-16}$$

чтобы найти минимальное значение, возьмём производную

$$\left(\frac{t^2+8t+16}{8t-16}\right)'=\frac{(2t+8)(8t-16)-8(t^2+8t+16)}{(8t-16)^2}=\frac{8t^2-32t-256}{(8t-16)^2}=$$

$$=\frac{8(t-8)(t+4)}{(8t-16)^2}$$



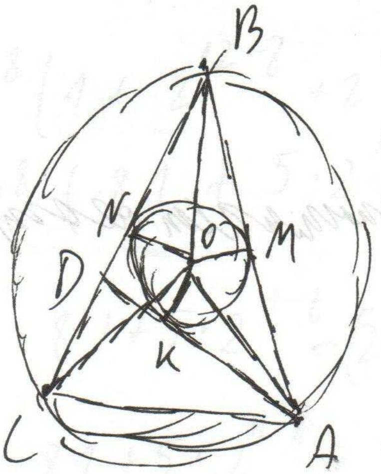
$t=8$ - точка минимума, подставим её в выражение

$$\frac{64+64+16}{64-16}=\frac{144}{48}=3$$

12

Ответ: 3

№ 4 $\angle B=\beta$ $\angle A=\alpha$ $\angle C=\gamma$



$\triangle MBO \sim \triangle NBO$ по гипотенузе и катету ($NO=MO=r$; BO-общая) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle NBO = \angle MBO = \frac{\beta}{2}$.

$\triangle OMA \sim \triangle KOA$ по гипотенузе и катету ($KO=MO=r$; AO-общая) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KAO = \angle OAM = \frac{\alpha}{4}$.

$BO=CO=R \Rightarrow \angle BCO=\angle OBC=\frac{\beta}{2}$

$CO=AO=R \Rightarrow \angle OCA = \angle OAC = \frac{3}{4}\alpha$ $\Big\} \Rightarrow \gamma = \frac{\beta}{2}+\frac{3\alpha}{4}$

$BO=OA=R \Rightarrow \angle OBA = \angle OAB \Rightarrow \frac{\beta}{2}=\frac{\alpha}{4} \Rightarrow \alpha = 2\beta$

$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

$2\beta+\beta+\frac{\beta}{2}+\frac{3\beta}{2}=180^\circ$ $\frac{4\beta+2\beta+\beta+3\beta}{2}=180^\circ$ $10\beta=360^\circ$

$\beta=36^\circ \Rightarrow \alpha=72^\circ \Rightarrow \gamma=72^\circ \Rightarrow \triangle CBA$- равнобедренный

$\angle DAB = \frac{\alpha}{2}=36^\circ=\angle DBA \Rightarrow \triangle BDA$ - равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow DA=BD$

$\angle CDA = 180^\circ-36^\circ-72^\circ=72^\circ=\angle BCA \Rightarrow \triangle DAC$-равнобедренный $\Rightarrow DA=CA$. $\triangle CBA \sim \triangle DCA$ по 2 углам $\Rightarrow$

$\frac{DA}{BC}=\frac{DC}{CA}$. пусть $AC=x$, тогда $DA=x$, $BC=x+\sqrt5-1$

$\frac{x}{x+\sqrt5-1}=\frac{\sqrt5-1}{x}$ пусть $\sqrt5-1=a$, тогда

$\frac{x}{x+a}=\frac{a}{x} \Rightarrow x^2=xa+a^2$ $x^2-xa-a^2=0$. $D=a^2+4a^2=5a^2$

$x_1=\frac{a-a\sqrt5}{2}=\frac{\sqrt5-1-\sqrt5+\sqrt5}{2}=\sqrt5-3$

$x_2=\frac{a+a\sqrt5}{2}=\frac{\sqrt5-1+5-\sqrt5}{2}=2$

$\sqrt5<3 \Rightarrow \sqrt5-3<0$ не подходит.

Ответ: 2

20

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

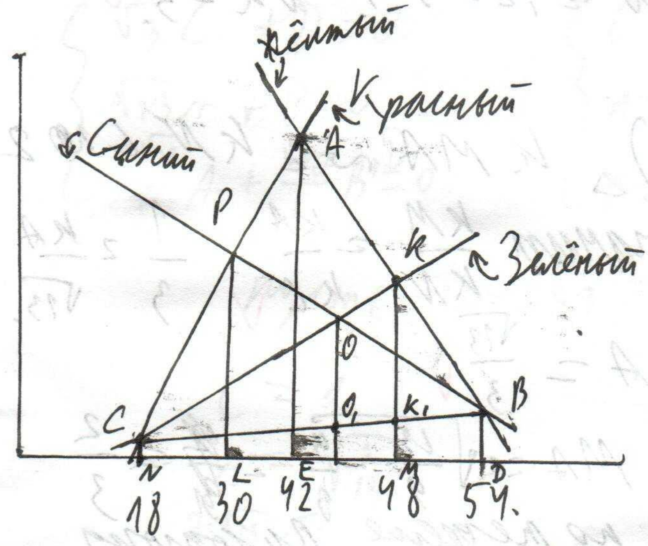
Шифр 216057

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 4

N 1

изобразим на рисунке движение лифтов. точки пересечений прямых, будут временем, когда лифты встретились. прямые $CN; PL; AE; OO_1; KM; BD$ — параллельны



1) $48-42=54-48 \Rightarrow EM=MD \Rightarrow$ В трапеции $ABED$ MK — средняя линия $\Rightarrow AK=BK$

2) $42-30=30-18 \Rightarrow NL=EL \Rightarrow$ в трапеции $CNAE$ PL — средняя линия $\Rightarrow CP=PA$

3) Рассмотрим $\triangle ABC$, в нём $CP=PA$ и $AK=BK$, значит CK и BP — медианы, значит $\frac{CO}{OK}=\frac{2}{1} \Rightarrow \frac{CO}{CK}=\frac{2}{3}$

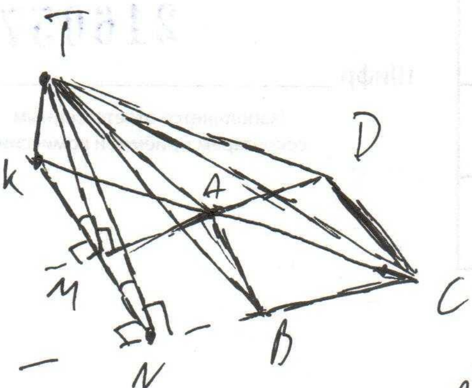
рассмотрим $\triangle COO_1$ и $\triangle CKK_1$, они подобны по 2 углам, значит $\frac{CO}{CK}=\frac{CO_1}{CK_1}$, $\frac{2}{3}=\frac{CO_1}{48-18}$ $CO_1=\frac{60}{3}=20$

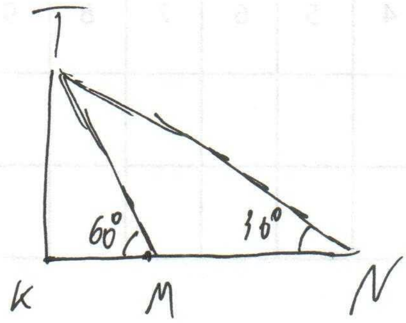
время встречи Синего и Зелёного $=20+18=38$ секунд

Ответ: 38 секунд.

12

N 6.





1) по теореме Пифагора в $\triangle KTM$

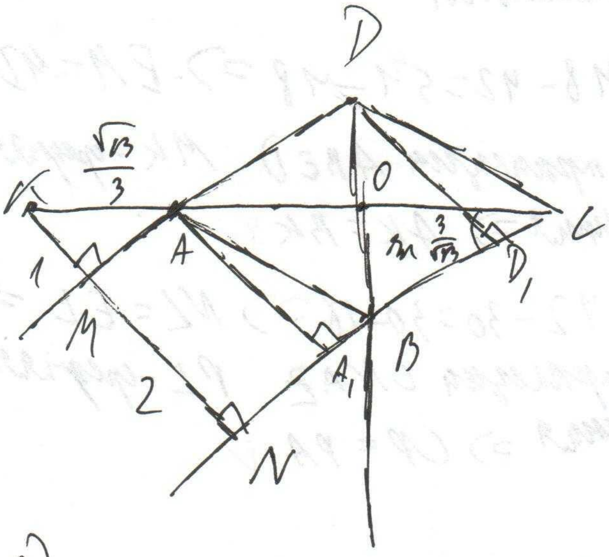
$3 = 4KM^2 - KM^2$ $KM = 1$.

2) по теореме Пифагора в $\triangle KTN$

$KN^2 = 12 - 3 = 9$. $NK = 3$.

3) по теореме Пифагора в $\triangle KTC$

$KC = \sqrt{16-3} = \sqrt{13}$



4) $\triangle KMA \sim \triangle KNC$ по 2 углам,

значит $\frac{KM}{KN} = \frac{KA}{KC}$ $\frac{1}{3} = \frac{KA}{\sqrt{13}}$.

$KA = \frac{\sqrt{13}}{3}$

5) $MA = \sqrt{\frac{13}{9} - \frac{9}{9}} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{9}} = \frac{2}{3}$

по теореме Пифагора

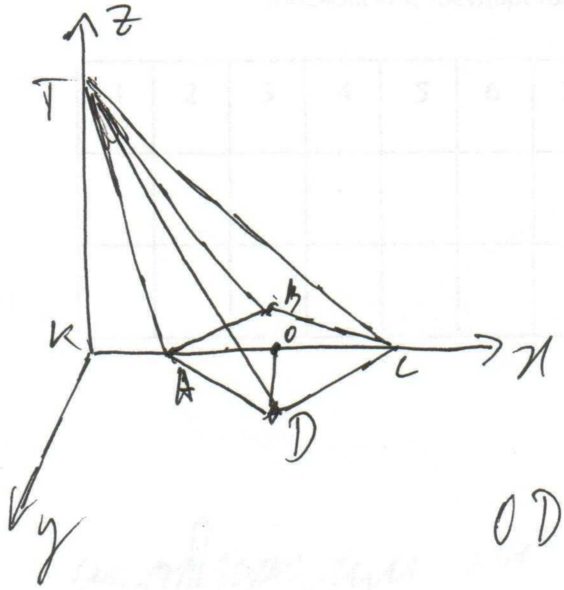
6) $\triangle KNC \sim \triangle KMA \Rightarrow \frac{KM}{KN} = \frac{MA}{NC}$. $NC = 3MA = 2 \Rightarrow$

$\sin\angle KCN = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \cos\angle KCN = \sqrt{1 - \frac{9}{13}} = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$OC = \frac{\sqrt{13}}{3}$ $OC = CB \cdot \cos\angle KCN$.

$CB = \frac{OC}{\cos\angle KCN}$ $CB = \frac{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}}{3 \cdot 2} = \cancel{\frac{13}{6}} = \frac{13}{6}$

Ответ: сторона основания $= \frac{13}{6}$



$T(0;0;\sqrt{3})$ ✓

$A\left(\frac{\sqrt{13}}{3};0;0\right)$ ✓

$C(\sqrt{13};0;0)$ ✓

$D\left(\frac{2\sqrt{13}}{3};\frac{\sqrt{17}}{6};0\right)$ как получено?

$OD=\sqrt{\frac{169}{36}-\frac{13}{9}}=\sqrt{\frac{169-52}{36}}=\frac{\sqrt{17}}{6}$?

Запишем уравнение плоскости.

$Ax+By+Cz+D=0.$

$$\begin{cases}\sqrt{3}C+D=0.\\ \sqrt{13}A+D=0.\\ \frac{2\sqrt{13}}{3}A+\frac{\sqrt{17}}{6}B+D=0.\end{cases} \quad ✓ \qquad \begin{cases}C=-\frac{D}{\sqrt{3}}\\ A=-\frac{D}{\sqrt{13}}\\ \cancel{B=-\frac{2\sqrt{13}}{3}A\cdot\frac{\sqrt{17}}{6}}\ \frac{2\sqrt{13}}{3}A+\frac{\sqrt{17}}{6}B+D=0.\end{cases} ✓$$

пусть $D=-\sqrt{3}$.

$C=1.$

$A=\sqrt{\frac{3}{13}}.$

$\frac{2\cdot\sqrt{13}\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{13}}+\frac{\sqrt{17}}{6}B-\sqrt{3}=0 \quad B=2\sqrt{\frac{3}{17}}.$

$\vec{n_1}=\left\{\sqrt{\frac{3}{13}};2\sqrt{\frac{3}{17}};1\right\}.$

15

$\vec{TA}=\left\{\frac{\sqrt{13}}{3};0;-\sqrt{3}\right\}$

$\cos\gamma=\frac{1\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\cdot 1}{\left(\frac{3}{13}+\frac{12}{17}+1\right)\cdot\left(\frac{13}{9}+3\right)}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{428}{221}\cdot\frac{40}{9}}=\frac{2\sqrt{3}\cdot221\cdot 3}{\cancel{3}\cdot428\cdot4020}$?

✓

?