Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

205028

Шифр ______________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Игнашин Игорь Николаевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Казань; МБОУ „лицей №145"

Регистрационный номер 4573

Вариант задания №14

+1

Дата проведения "29" февраля 2020 г.

Подпись участника ______________

(семьдесят)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

205028

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
12	12	16	5	5	20					70

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

5028

Вариант № 14

№1

Изделие В дороже А в $\frac{5}{4}$ раза, но материалы затрачиваются больше ~~как~~ в 4 раза (по стали) и в $\frac{40}{23}$ (по цветным металлам). Поэтому цеху выгоднее произвести все изделия А и ни одного В. Максимальное количество ~~деталей~~ изделий А, которое цех может произвести по условию, равняется ~~70~~ ~~(70·10кг стали = 900кг~~ ~~90~~ 24 (24·23≤642)

Но остается очень много стали (400−240кг) и 21 кг цветмета, становится ясно, что если заменить ~~1 А~~ одно изделие А на В — прибыль увеличится, ~~а чем~~. Причем если изделий В будет 2, то придется заменять уже три А ~~и~~ и прибыль снова упадет. ~~по~~ Значит максимум прибыли достигается при: ~~А~~

$\boxed{26А \text{ и } 1В}$ (700 > 260+40 и 642 > 26·23+40 (638))

12

V

Найдем прибыль: 26·80000 + 100000 = 2180000 рублей

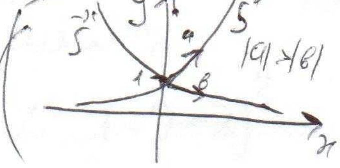
№2

$$\left(5+\cos^2(x+y)-4\cos(x+y)\right)\log_2\left(5^x+5^{-x}\right)\le 2$$

$$\left(2\cos^2(x+y)-4\cos(x+y)+4\right)\left(\log_2 5^x+5^{-x}\right)\le 2$$

$$2\left(\left(\cos(x+y)-1\right)^2+1\right)\left(\log_2 5^x+5^{-x}\right)\le 2$$

Заметим, что $\log_2 5^x+5^{-x}\ge 1$



$F(x)=5^x$

$F(x+\Delta x)>F(x)$

$|(5^x)'|\ge|(5^{-x})'|$ при $x\ge 0$

$(5^x+5^{-x})'\ge 0 \Leftarrow$

$(5^x+5^{-x})_{min}=2$ (при $x=0$)

отсюда $5^x+5^{-x}\ge 2$

и $\log_2 5^x+5^{-x}\ge 1$

$$\left(\left(\cos(x+y)-1\right)^2+1\right)\left(\log_2 5^x+5^{-x}\right)\le 1$$

достигается только при $\begin{cases}\cos(x+y)=1\\ x=0\end{cases}$

Ответ: $\begin{cases}y=2\pi k \quad k\in\mathbb{Z}\\ x=0\end{cases}$ V

12

№3 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ – (числа, задуманные Самой, в порядке возрастания)

Очевидно, что 26 24 20 19 – максимальные суммы а следовательно это суммы a_5+a_4; a_3+a_5; a_2+a_5; a_1+a_5

Значит $19=a_5+a_1$ ($a_1\ne a_2\ne a_3\ne a_4\ne a_5$ т.к все суммы различны)

Также сумма 7 – минимальна; значит $a_1+a_2=7$

~~$a_1+a_3=11$~~ ~~$a_2+a_3=$~~ $(a_5+a_2)-(a_5+a_1)=20-19=1=a_2-a_1$

~~$a_1+a_4=12$~~

~~$a_1+a_5=13$~~ $\begin{cases}a_2-a_1=1\\ a_1+a_2=7\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}a_1=3\\ a_2=4\end{matrix}$

Тогда $a_5=19-a_1=16$

$a_4=10=26-a_5$

$a_3=24-a_5=8$

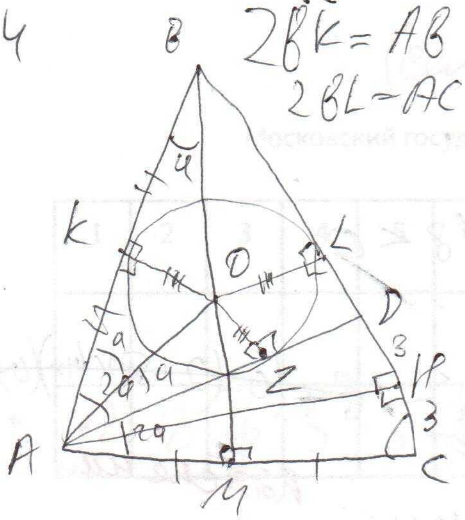
Значит числа, задуманные Самой таковы:

3,4;8,10,16 V

16

№4 $2BK = AB$

$2BL = AC$



KO; OL, OM – серединные перпендикуляры

т.к. $KO = OL = R_{впис}$ и BO – общая и треугол-прямоуг., то $\triangle BOK$ и $\triangle BOL$ равны а значит $BK = BL$ и это означает что $AB = BC$

$\angle ABM = 90 - \angle BAM = 90 - 4a$

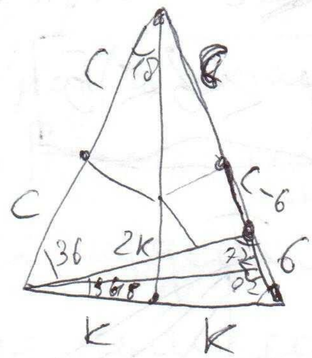
~~$\angle AOK = \angle OAB$ т.к $\triangle OAZ = \triangle OBK$~~ (OK

$\angle ABM = \angle OAD$ т.к $\triangle OAK = \triangle OAZ$ (OA – общ, OK = OZ)

также $\angle ABM = \angle OAB$ т.к $\triangle OBK = \triangle AOK$ треуг-прямоуг.

$\angle DAM = \angle BAD = 2a$

$a = 90 - 4a \quad a = \frac{90}{5} = 18 \quad 2a = 36$



$\angle AHC = \angle ACH = 72^\circ$

$\angle ABD = \angle DAB = 36^\circ$

$\triangle AHC \sim \triangle ABM$ по 3 углам

$\frac{HC}{AC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{3}{2k} = \frac{k}{2c} \quad 6c = k^2$ 3

$AC = AD = BD \qquad k^2 - 6k - 18 = 0$

$2k = 2c - 6 \quad 6k = 6c - 18 \quad (k-3)^2 - 27 = 0$

$\boxed{k = 3 + 3\sqrt{3}}$

$\boxed{c = 6 + 3\sqrt{3}}$

Ответ:

$S_{ABD} = \frac{1}{2} \sin 36^\circ \cdot 2k \cdot 2c$

$= 2kc \cdot \sin 36^\circ = \frac{2 \cdot 3(1+\sqrt{3}) \cdot 3(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{\cancel{4}\, 2}$

$\frac{9}{2}(19 + 11\sqrt{3})$

$= \frac{171 + 99\sqrt{3}}{2}$?

$\sin 18^\circ = \frac{3+3\sqrt{3}}{2(6+6\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})4}$

~~$\sin 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = \frac{2(1+\sqrt{3})^2 - 1}{8(1+\sqrt{3})^2}$~~

~~$= \frac{7 + 4\sqrt{3}}{8 + 4\sqrt{3}}$~~

$\sin 18^\circ = \frac{(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$

$\sin 36^\circ = 1 - 2\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{16}\right)$?

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

5

№5

$$ctg^2x + 4(a-b)ctgx + a^2 + b^2 - 18 < 0$$

$$(b+2ctgx)^2 - 3ctg^2x + 4a\,ctgx + a^2 - 18 < 0$$

$$(a+2ctgx)^2 - 4ctg^2x - 18$$

$$(b-2ctgx)^2 < \underbrace{18 + 4ctg^2x - (a+2ctgx)^2}_{} = \cancel{18 - (a+(2-\sqrt{\ }) ctgx)(a+2+\sqrt{\ })ctgx}$$

? пояснений

? найдем минимум

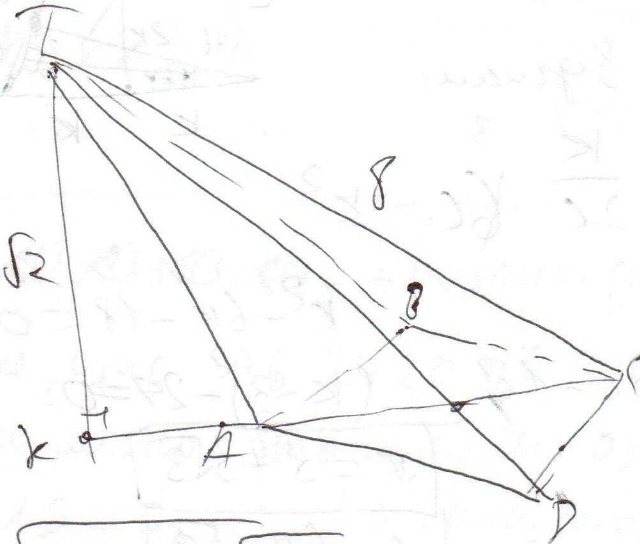
$$min = 18 + 4 - (-2-2)^2 = 9$$

5

$$-3 \leq b - 2ctgx \leq 3 \qquad -1 \leq ctgx \leq 1$$

Ответ: $\boxed{-1 < b < 5}$? $(-2;1)$. $-2 \leq a < 1$

№6

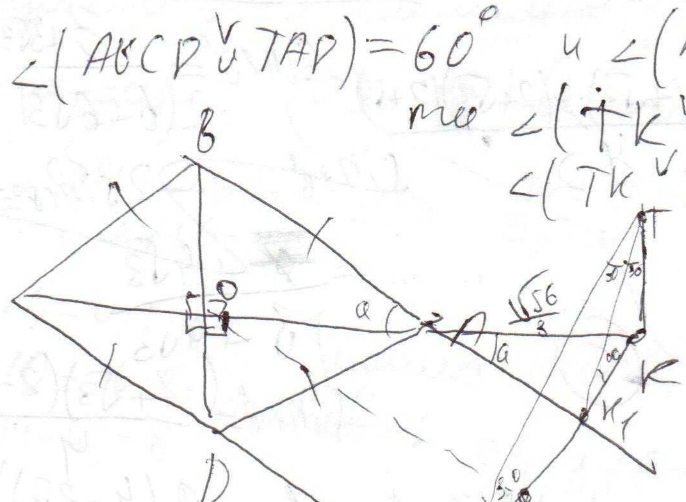


$$KC = \sqrt{64-8} = \sqrt{56}$$

т.к $\angle(ABCD \,^\vee\, TAD) = 60°$ и $\angle(ABCD \,^\vee\, TCD) = 30$

то $\angle(TK \,^\vee\, TH_1) = 30°$

$\angle(TK \,^\vee\, TH_2) = 60°$



? TK

$$KH_1 = \frac{TK}{\sqrt{3}}$$

$$KH_2 = TK\sqrt{3}$$

$$\frac{KH_1}{KH_2} = \frac{1}{3}$$

0

+1 Tley

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

205028

Шифр ____________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 14

Тогда $\frac{KA}{KC}=\frac{1}{3}$ и $K\cancel{A}=AO=OC=\frac{\sqrt{56}}{3}$

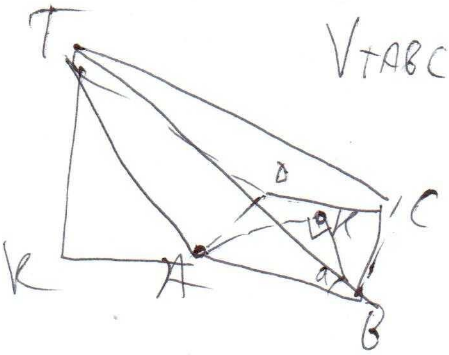
$\cancel{A}\ KH_1=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $AK=\frac{\sqrt{56}}{3}$ $AO=\frac{\sqrt{56}}{3}$

$AH_1=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}$ $\frac{AH_1}{AK}=\frac{AO}{AB}\Rightarrow AB=\frac{\sqrt{56}}{3}\cdot\sqrt{\frac{7}{4}}$

$AB=\frac{7\sqrt{2}}{3}$

Ответ: 1) длина стороны $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ✓

Для нахождения угла между прямой и плоскостью найдем высоту, проведенную к проекции прямой на плоскость.



$V_{TABC}=\frac{1}{3}AH\cdot S_{TBC}=\frac{1}{3}TK\cdot S_{ABC}$

$S_{TBC}=\frac{28}{3}$ $S_{ABC}=\frac{28}{3\sqrt{3}}$

$AH=\frac{TK}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Искомый угол $\alpha=\arcsin\left(\frac{AH}{AB}\right)=\arcsin\left(\frac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{4\sqrt{2}}{3}}\right)$

$\angle\alpha=\arcsin\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)$ ✓