Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

205058

Шифр __________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

+1 лист

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Щербакова Виктория Алексеевна

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Иваново, МБОУ "лицей N33"

Регистрационный номер 10803

Вариант задания 6

Дата проведения « 24 » февраля 2020 г.

Подпись участника __________

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

(шестьдесят пять)

205058

Шифр __________
заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего
6	~~10~~ 3	16	15	10	15					65

70 - балл после апелляции

058

Вариант № 6

№1

Пусть изготовили x шт юбок; y шт платьев, тогда $(x, y \in \mathbb{Z})$

x юбок $= 1{,}5x + 0{,}5y$ ($м^2$) (всего ткани)

y платьев $= 1{,}6x + 0{,}7y$ ($м^2$) (всего ткани), то

по условию (1): $(1{,}5x + 1{,}6x) \le 170$ ($м^2$), а (2): $(0{,}5y + 0{,}7y) \le 65$ ($м^2$)

и необходимо найти x и y так, чтобы (3): $5x + 12y \Rightarrow \max$

из (1): $3{,}1x \le 170$ $\quad x \le 54\frac{26}{31}$ $\qquad$ из (2): $1{,}2y \le 65$ $\quad y \le 54\frac{1}{6}$, тогда

(3): $5x + 12y \Rightarrow \max$ при $\max$ x и y (где $x, y \in \mathbb{Z}$), т.е.

$x_{max} = 54$ $\quad$ $y_{max} = 54$

Но при таких условиях останется $3м^2$ 1-ой ткани и $4м^2$ 2-ой ткани,

из этого количества мы можем сшить либо 1 платье либо 2 юбки, но 1 платье дороже (выгоднее) 2-ух юбок, т.е.

Получаем, что чтобы получить наибольший доход необходимо сшить 54 юбки и 55 платьев, тогда доход будет равен:

$54 \cdot 5 + 55 \cdot 12 = 930$ (тыс. рублей)

$54 \times 5 = 270$ $\qquad$ 55×12: $110 + 55 = 660$ $\qquad$ $660 + 270 = 930$

(6)

1109

Ответ: нужно сшить 54 юбки и 55 платьев; наиб. доход равен 930 тыс. руб.

(3)

Пусть Саша задумал 5 чисел: a, b, c, d, e, тогда т.к. среди попарных сумм 4 чётных числа и 6 нечётных, то это означает, что среди 5 чисел равно 2 чётных числа и 3 нечётных, тогда

выпишем чётные попарные суммы:

$8 - ч+ч$

$16 - н+н$

$22 - н+н$

$28 - н+н$

пусть a, b, c - нечётные и записанные в порядке возрастания, тогда

$$\begin{cases} a+b=16 \\ a+c=22 \\ b+c=28 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=16 \\ b-a=6 \\ a+c=22 \end{cases} \quad \begin{cases} b=11 \\ a=5 \\ c=17 \end{cases}, \text{тогда}$$

$d+e=8$ и $d=2$, $e=6$ (т.к. существует уже число 5, а одна попарная сумма равна 7),

т.е. $2, 6, 5, 11, 17$ — 5 задуманных чисел Саши;

Проверка:

$2+5=7$ $\quad 2+17=19$

$2+6=8$ $\quad 17+5=22$

$6+5=11$ $\quad 17+6=23$

$2+11=13$ $\quad 11+17=28$

$6+11=17$

Ответ: $2; 5; 6; 11, 17$ V

(16)

№5

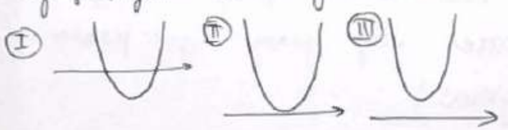
$ctg^2 x - 4(a-b)ctg x + a^2+b^2-18<0$,

$ctg x = t$, тогда $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$

$-1 \leq ctg x \leq 1$, т.е. $t \in [-1;1]$

$t^2 - 4(a-b)t + a^2+b^2-18<0$ ← при каких значениях b для $a \in [-1;2]$ это выполняется на $t \in [-1;1]$?

коэф перед t^2 равен 1, т.е. у параболы ветви вверх, тогда существует 3 случая:



Очевидно, что II и III случае нам точно не подходят, а I случай подходит, если промежуток $t \in [-1;1]$ будет расположен строго между нулями параболы, т.е.

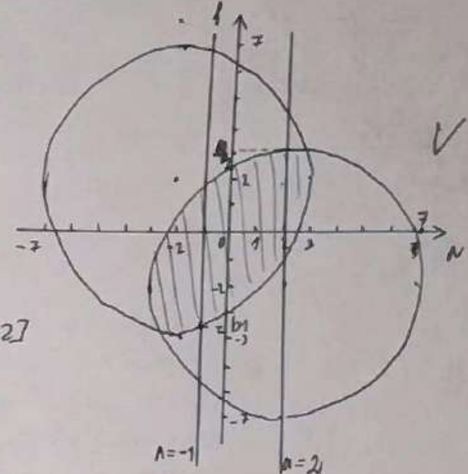
(*) $\begin{cases} f(-1)<0 \\ f(1)<0 \end{cases}$ $+ \; a \in [-1;2]$

(*)

$$\begin{cases} 1+4(a-b)+a^2+b^2-18<0 \\ 1-4(a-b)+a^2+b^2-18<0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+4a+4+b^2-4b+4-17-8<0 \\ a^2-4a+4+b^2+4b+4-17-8<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+2)^2+(b-2)^2<25 & (1) \; V \\ (a-2)^2+(b+2)^2<25 & (2) \; V \end{cases}$$

Получаем 2 окружности на Oab и в системе их получаем их пересечение без границ окружностей



V

Теперь нарисуем полосу $a \in [-1;2]$

тогда $b \in (b_1; b_2)$, где

b_1:

(1) $\begin{cases} (-1+2)^2+(b_1-2)^2=25 \\ b_1<0 \end{cases}$

$\begin{cases} (b_1-2)^2=24 \\ b_1<0 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b_1-2=\sqrt{24} \\ b_1-2=-\sqrt{24} \end{array}\right. \\ b_1<0 \end{cases}$ $b_1=-\sqrt{24}+2 = -2\sqrt{6}+2$

b_2:

(2) $\begin{cases} (2-2)^2+(b_2+2)^2=25 \\ b_2>0 \end{cases}$

$\begin{cases} 0+(b_2+2)^2=25 \\ b_2>0 \end{cases}$ $b_2=3$ т.е.

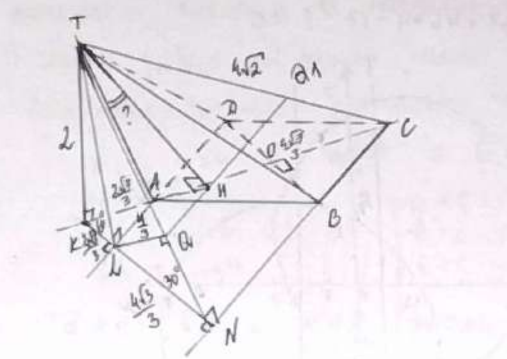
$b \in (-2\sqrt{6}+2; 3)$

Ответ: $(-2\sqrt{6}+2; 3)$?

(10)

№6

не удобно иметь рисунок на 1 стр, а решение на следующей стр



Дано: $TABCD$ – пирамида
$ABCD$ – ромб
$TK \perp (ABC)$
$TK = 2$
$K \in AC$; $KC = KA + AC$
$TC = 4\sqrt{2}$
боковые грани наклонены к пл. основания под углами 30° и 60°

Найти: ~~AB~~; AD;
$\angle(TA; (TBC))$

Решение

1. Из $\triangle TKC$ ($\angle K = 90^\circ$): по т. Пифагора: $KC = \sqrt{32-4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$
2. Очевидно, что под углами 30° и 60° наклонены 2 пары смежных равных граней, т.е $\angle((TAB); (ABC)) = \angle((TAD), (ABC)) = 60^\circ$, а
$\angle((TBC), (ABC)) = \angle((TDC)(ABC)) = 30^\circ$
3. Дп: $KN \perp BC$, тогда $KN \cap AD = K$ и т.к $BC \parallel AD$, то $KL \perp AD$, тогда строим TL и TN, и по теореме о трёх перпендикулярах:
$TL \perp AD$ и $TN \perp BC$, т.е получаем, что $\angle TNK = \angle((TBC)(ABC)) = 30^\circ$, а
$\angle TLK = \angle((TAD)(ABC)) = 60^\circ$
4. Из $\triangle TKN$. ~~по т. Пифагора~~ $TN = 4$ (т.к гипотенуза равна удвоенному катету, лежащему против угла 30°), тогда $KN = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
А из $\triangle TKL$: $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{KT}{KL} \Rightarrow KL = \frac{KT}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, т.е
получаем, что $KL : KN = 1 : 3$
5. $\triangle KLA \sim \triangle KNC$ (по 2-ум углам: общему и равным по 90°), т.е
$\frac{KA}{KC} = \frac{KL}{KN} = \frac{1}{3}$, тогда $AC = \frac{2}{3} \cdot KC = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{7} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$ и тогда $AO = OC = AK = \frac{2\sqrt{7}}{3}$
6. Дп: $DB \cap AC = O$ тогда по св-ву ромба $DB \perp AC$
7. $\triangle KLA \sim \triangle DOA$ (по 2-ум углам), а $KA : AC = 1:1$, т.е $AL : AD = 1:1$, т.е
Из $\triangle KLA$: по т. Пифагора: $AL = \sqrt{\frac{4 \cdot 7}{9} - \frac{4 \cdot 3}{9}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4}{9}} = \frac{4}{3}$, т.е $AD = AL = \frac{4}{3}$?
$AD = \frac{4}{3}$
8. Дп: в пл. (TNK): $LQ \perp TN$, тогда т.к $NC \perp (KNT)$ по признаку: $NC \perp KN$, $NC \perp TN$, $KN \cap TN = N$
тогда $LQ \perp TN$, $LQ \perp NC$, $TN \cap NC = N$ $\Rightarrow LQ \perp (TNC)$, т.е
$LQ \perp (TBC)$

продолжение на доп листе

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

205058

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего

Шифр ______
заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

Вариант № 6

продолжение №6:

9) В пл. (TBC): строим $QQ_1 \parallel NC$, где $Q_1 \in TC$, тогда прямые AD и QQ_1 задают пл. α и в пл. α строим $AH \parallel LQ$, тогда получим, что $AH \perp LQ$, $LQ \perp (TBC)$ $\Rightarrow AH \perp (TBC)$, т.е

$\angle(AT; (TBC)) = \angle ATH$

10) $LQ \parallel AH$; $QH \parallel AL$ $\Rightarrow$ $LQHA$ – парал-м (по опред.), т.е
$AH = LQ$, а $LQ = \frac{1}{2} NN = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (т.к катет лежащий напротив угла 30° равен половине гипотенузы)

11) Из $\triangle KAT$: по т. Пифагора: $AK = \frac{2\sqrt{7}}{3}$, $TK = 2$, т.е
$AT = \sqrt{4 + \frac{4 \cdot 7}{9}} = \sqrt{\frac{4 \cdot (9+7)}{9}} = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$

12) Из $\triangle ATH$ получаем, что $\sin\angle ATH = \frac{AH}{AT} = \frac{2\sqrt{3}}{3} : \frac{8}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, т.е
$\angle ATH = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$ $= \angle(TA, (TBC))$

Ответ: $AD = \frac{4}{3}$ 7; $\angle(TA; (TBC)) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$ V 15

№2

$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{90})^3$ Найти: коэфф перед x^{90}

решение на обороте листа

$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$

$(1+x+x^2)^3 = (1+x)^3 + 3(1+x)^2x^2 + 3(1+x)x^4 + x^6 = 1+3x+3x^2+x^3+$

$+3x^2(1+2x+x^2) + 3x^4 + 3x^5 + x^6 = 1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$

$(1+x+x^2+x^4)^3 = (1+x+x^2)^3 + 3(1+x+x^2)^2x^4 + 3(1+x+x^2)x^8 + x^{12} =$

$= 1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6 + 3x^4(1+x^2+x^4+2x+2x^2+2x^3)+$

$+3x^8+3x^9+3x^{10}+x^{12} = 1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6+3x^4+3x^6+3x^8+6x^5+$

$+6x^6+6x^7+3x^8+3x^9+3x^{10}+x^{12} = 1+3x+6x^2+7x^3+9x^4+9x^5+10x^6+$

$+6x^7+6x^8+3x^9+3x^{10}+x^{12}$

Легко заметить, что коэф. перед последним слагаемым в сумме, которое возведено в куб увеличивается с каждым шагом на 3, т.е

пусть A_n: $x^2, x^4, x^6, \dots, x^{90}$

B_n: $2, 4, 6, \dots, 90$

$b_1 \quad b_2 \quad b_{45}$

C_n: $3, 6, 9, \dots$

C_1, C_2, C_3 т.е $C_{45} = 3 + 44\cdot 3 = 45\times 3 = 135$ т.е

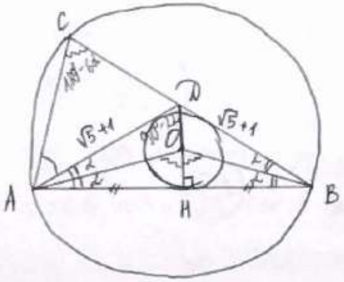
коэф. перед x^{90} будет равен 135

Ответ: 135

4186

3

№4



Дано: $\triangle ABC$

AD – биссектриса

Окр(O, R) – описано около $\triangle ABC$

Окр(O, r) – вписана в $\triangle ABD$

$AD = \sqrt{5}+1$

Найти: $S_{\triangle ABD}$

Решение

1. Дп: $OH \perp AB$, тогда H – середина AB, где $OH = r$, т.к. O – точка пересечения серединных перпенд., тогда

$\triangle OHA = \triangle OHB$ по 2-ум катетам, т.е $\angle OAH = \angle OBH$, но тогда O – центр пересечения биссектрис $\triangle AOB$, т.е наз половины углов равны, то

и сами углы $\angle DAB$ и $\angle DBA$ тоже равны, т.о

$\angle DAB = \angle DBA$, тогда $\triangle DAB$ – равноб. с осн. AB (по признаку), т.е

$AD = DB = \sqrt{5}+1$

2. Т.к $\triangle DAB$ – равноб. с осн AB, где O – центр впи. окр, а H – середина AB, то DH – высота, медиана и биссектриса, т.е $O \in DH$

3. Пусть $\angle DBA = 2\alpha$, тогда $\angle CAB = 4\alpha$, т.е $\angle ACB = 180° - 6\alpha$, а $\angle ACB$ – вписанный, опирающийся на $\smile AB$, т.е $\angle AOB$ – центр. опир на $\smile AB$,

$\angle AOB = 2\angle ACB = 2(180° - 6\alpha)$, тогда

в $\triangle AOB$: $\angle OAB + \angle OBA + \angle AOB = 180°$

$\alpha + \alpha + 360° - 12\alpha = 180°$

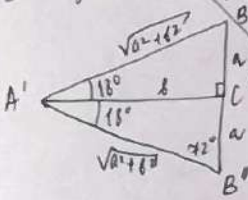
$10\alpha = 180°$

$\alpha = 18°$ ✓

4. Получаем, что $\angle ADB = 180° - 4\alpha = 180° - 72° = 108°$

Соответственно зная синус 18° можно найти и синус 108°

5. Отдельно найдем синус/косинус 18°



по т. косинусов:

1) $4a^2 = a^2+b^2+a^2+b^2 - 2\cdot(a^2+b^2)\cos 36°$

$\cos 36° = \frac{2b^2-2a^2}{2(a^2+b^2)} = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$

2) $a^2+b^2 = a^2+b^2+4a^2 - 2\cdot 2a\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos 72°$

$\cos 72° = \frac{4a^2}{4a\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin 18°$

$\cos 72° = \cos(2\cdot 36°) = 2\cos^2 36° - 1$

$2\cdot\left(\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right)^2 - 1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$2\frac{(b^2-a^2)^2}{(a^2+b^2)^2} - 1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\frac{4(b^2-a^2)^4}{(a^2+b^2)^4} + 1 - \frac{4(b^2-a^2)^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2} \quad \Big|\cdot(a^2+b^2)^4$

$4(b^2-a^2)^4 + (a^2+b^2)^4 - 4(b^2-a^2)^2(a^2+b^2)^2 = a^2(a^2+b^2)^3$

6) $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, тогда

$\sin\angle ADH = \sin(90^\circ - 2\alpha) = \sin(90^\circ - 2\cdot 18^\circ) = \cos(2\cdot 18^\circ) = 1 - 2\sin^2 18^\circ =$

$= 1 - 2\cdot\frac{5+1-2\sqrt{5}}{16} = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{8} = \frac{8-6+2\sqrt{5}}{8} = \frac{2+2\sqrt{5}}{8}$

$16 \times 6 = 96$

$\sin\angle ADB = \sin(2\cdot\angle ADH) = 2\cdot\sin\angle ADH\cdot\cos\angle ADH =$

$\sin\angle ADH = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{8}$, где т.к. $\angle ADH$ - острый, то

$\cos\angle ADH = \sqrt{1-\left(1-\frac{6-2\sqrt{5}}{8}\right)^2} = \sqrt{\cancel{1}-\cancel{1}-\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{8}\right)^2+2\cdot\frac{6-2\sqrt{5}}{8}} =$

$= \sqrt{-\frac{36+20-24\sqrt{5}}{64}+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{-56+24\sqrt{5}+16(6-2\sqrt{5})}{64}} =$

$= \frac{\sqrt{-56+24\sqrt{5}+96-32\sqrt{5}}}{8} = \cancel{\frac{\sqrt{8\sqrt{5}-40}}{8}} = \frac{\sqrt{40-8\sqrt{5}}}{8} = \frac{\sqrt{8(5-\sqrt{5})}}{8} =$

$= \cancel{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}$ где.

$= 2\cdot\frac{8-6+2\sqrt{5}}{8}\cdot\frac{\sqrt{8(5-\sqrt{5})}}{8} = \frac{2\cdot 2(1+\sqrt{5})\cdot\sqrt{8(5-\sqrt{5})}}{64} =$

$= \frac{\cancel{8}(1+\sqrt{5})\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{\cancel{64}\ 8} = \frac{(1+\sqrt{5})(\sqrt{2(5-\sqrt{5})})}{8}$, где

7) $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}\cdot AD\cdot BD\cdot\sin\angle ADB = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5}+1)^2\cdot\sin\angle ADB =$

$= \frac{(\sqrt{5}+1)^3\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{16}$

Ответ: $\frac{(\sqrt{5}+1)^3\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{16}$?

15