Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1 лист

216458

Шифр ______________________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Башмаков Михаил Михайлович

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, „Павловская гимназия"

Регистрационный номер 563

Вариант задания 2

Дата проведения “16” 02 2020 г.

Подпись участника ______________________

$\Sigma = 78$ (семьдесят восемь) [illegible]

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
–	12	16	20	20	10					78

216458

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

216458

Вариант № 2

№3

$2^8+2^{11}+2^{12}+3\cdot 2^n = N^2$ N - натур. число

I $n \geq 8$

$2^8(1+2^3+2^4+3\cdot 2^{n-8}) = N^2$

2^8 - квадрат, значит $25+3\cdot 2^{n-8}$ - квадрат

~~$25+3\cdot 2^{n-8}$ - квадрат~~

$25+3\cdot 2^{n-8}$ - нечетное число

$25+3\cdot 2^{n-8} = (2K-1)^2$, $K > 1$

$25+3\cdot 2^{n-8} = 4K^2-4K+1$

$3\cdot 2^{n-8} = 4K^2-4K-24$

$3\cdot 2^{n-8} = 4(K^2-K-6)$

$3\cdot 2^{n-8} = 2^2(K^2-K-6)$

1). $n \geq 10$

$3\cdot 2^{n-10} = (K+3)(K-2)$

2). $n=8$

$25+3$ - не квадрат

3). $n=9$

$25+6$ - не квадрат

но т.к $K>1$, то $K+3>3$, значит $K-2$ делитель ~~[illegible]~~ 3

$K+3$ или $K-2$ - делители 3

$\left[\begin{array}{l} K-2=1 \\ K-2=3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} K=3 \\ K=5 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 3\cdot 2^{n-10}=6 \\ 3\cdot 2^{n-10}=8\cdot 3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2^{n-10}=2^1 \\ 2^{n-10}=2^3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} n=11 \\ n=13 \end{array}\right.$

Ответ 11; 13

II $n<8$

$2^n(2^{8-n}+2^{11-n}+2^{12-n}+3) = N^2$

2^n - квадрат, при $n=2K$, $K>0$

$2^n(2^{8-n}(1+2^3+2^4)+3) = N^2$

$2^n(2^{8-n}(25)+3)$

$2^{8-n}(25+3)$ - число, которое оканчивается на 3, а квадратов, которые оканчиваются на 3 - нет.

~~Ответ~~

16

№ 2

$$\begin{cases} \dfrac{15f(1)-10f(0)+3f(-1)}{f(0)-f(-1)} \\ F(x)=ax^2+bx+c \end{cases} = \frac{15a+15b+15c-10c+3a-3b+3c}{3b-9a}$$

$$\begin{cases} ax^2+bx+c \geq 0 \\ a>0 \\ b^2-4ac \geq 0 \\ b>3a \end{cases} \qquad \begin{cases} b>0 \\ a>0 \\ c>0 \\ c \leq \frac{b^2}{4a}, \; c_{\text{наим}} = \frac{b^2}{4a} \\ b>3a \end{cases}$$

$$\frac{18a+12b+8c}{3b-9a} \geq \cancel{\frac{18a+12b+\frac{2b^2}{a}}{3b-9a}} = -2+\frac{18b+8c}{3b-9a}$$

$$-2+\frac{18b+8c}{3b-9a} \geq -2+\frac{18b+\frac{2b^2}{a}}{3b-9a}$$

$$\frac{18b+8c}{3b-9a} \geq \frac{18\frac{b}{a}+2\frac{b^2}{a^2}}{3\frac{b}{a}-9}$$

$$g(x)=\frac{18\frac{b}{a}+2\frac{b^2}{a^2}}{3\frac{b}{a}-9}$$

Замена: $\frac{b}{a}=t$

$$g(x)=\frac{18t+2t^2}{3t-9}$$

$$g'(x)=\frac{(18+4t)(3t-9)-3(18t+2t^2)}{3t-9}=\frac{18\cdot 3t+12t^2-18\cdot 9-36t-3\cdot 18t-6t^2}{(3t-9)^2}=$$

$$=\frac{6t^2-36t-162}{(3t-9)^2}=\frac{6(t^2-6t-27)}{(3t-9)^2}=\frac{6(t-9)(t+3)}{(3t-9)^2}$$

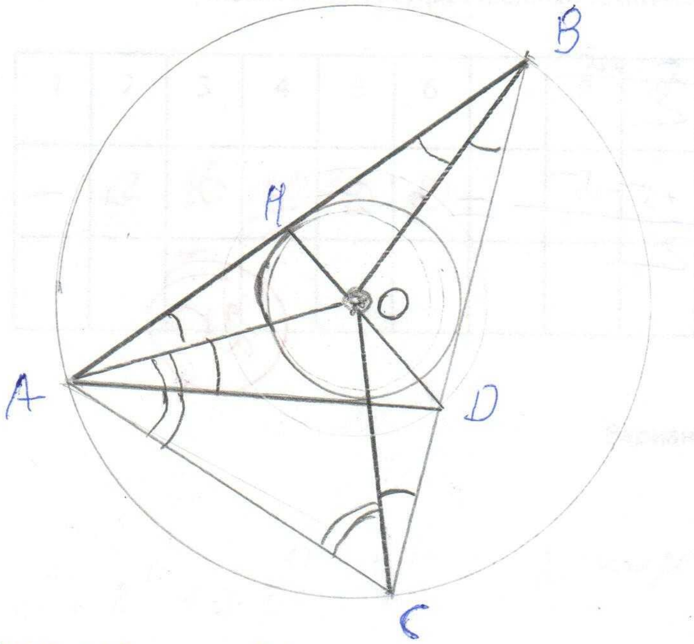
+ − + ; -3, 9; t

$t_{min}=9 \quad g(t_{min})=\frac{18\cdot 9+18\cdot 9}{27-9}=18.$

Изначальное выражение $-2+\frac{18b+8c}{3b-9a}=-2+18=16.$ Ответ: 16.

12

№4

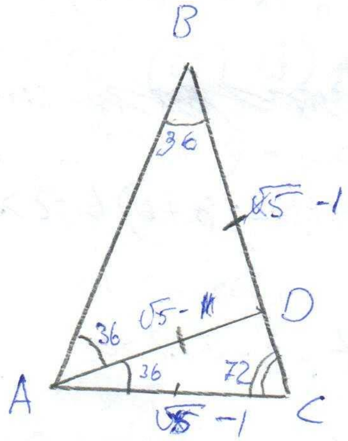


Дано:
$\triangle ABC$
AD - биссектриса
окр $(O; OH)$
окр $(O; OB)$
$AD=\sqrt{5}-1$
Найти:
AB

Решение: 1) Пусть $\angle BAD=\alpha$
тогда $\angle OAD=\alpha$ (по опр бисс)
Тогда $\angle BAD=2\alpha$, тогда $\angle BAC=4\alpha$ (по опр бисс)
2). $\triangle AOB$ р/б ($AO=OB$), т.к радиусы окр $(O; OB)$
$\angle OBA=\alpha$
тогда $\angle OBD=\alpha$ (по опр бисс), тогда $\angle ABC=2\alpha$.
3). $\triangle COB$ р/б ($CO=OB$)
$\angle OBD=\angle OCD=\alpha$
4). $\triangle AOC$ р/б ($AO=OC$)
$\angle OAC=\angle ACO$.
$\angle BAC=4\alpha$
$\angle OAC=3\alpha$
$\angle ACO=3\alpha$
5). $\triangle ABC$

$$\left.\begin{array}{ll} \angle A=4\alpha & \angle A=72 \\ \angle B=2\alpha & \angle B=36 \\ \angle C=4\alpha & \angle C=72 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \text{ р/б.}$$

$AB=BC$
по теор о сумме углов $\triangle$
$4\alpha+2\alpha+4\alpha=180$
$\alpha=18$.



6). $\angle ADC=180-36-72=36$
$\triangle ADC$ - р/б
$AC=XC$
7). $\triangle ABD$ р/б $\angle DAB=\angle ABD$
$AD=BD$
8). Пусть $CD=x$.
~~AC=x=BD~~
$BC=x+\sqrt{5}-1$
$AB=x+\sqrt{5}-1$
по св-ву бисс
$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}$ $\quad \frac{x+\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{x}$.

$x+(\sqrt{5}-1)x-(\sqrt{5}-1)^2=0$

$D=(\sqrt{5}-1)^2+4(\sqrt{5}-1)^2=5(\sqrt{5}-1)^2$

$\frac{-\sqrt{5}+1-\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2}=\frac{-\sqrt{5}+1-5+\sqrt{5}}{2}$

$\frac{-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2}=\frac{-\sqrt{5}+1+5-\sqrt{5}}{2}=3-\sqrt{5}$

20

$DC=3-\sqrt{5}$

$AD=\sqrt{5}-1+3-\sqrt{5}=2$

Ответ: $AB=2$.

№5

$a^2+b^2-\cos^2 4x-2(a+b)\sin 4x-2>0$.

$a\in[-1;2]$

b-? не верно хотя бы для одного x.

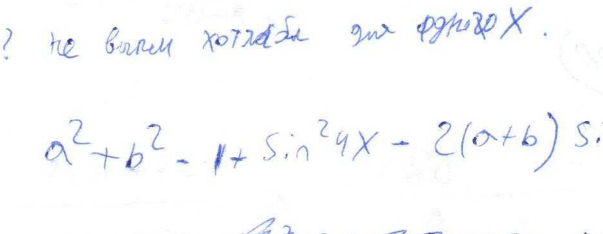
$a^2+b^2-1+\sin^2 4x-2(a+b)\sin 4x-2>0$

Замена: $\sin 4x=t$, $|t|\le 1$.

$a^2+b^2-1+t^2-2(a+b)t-2>0$

$t^2-2(a+b)t-3+a^2+b^2>0$

Найдем все t, при которых система удовлетворяет неравенству



I $\begin{cases} t_{верш}<-1 \\ F(-1)>0 \end{cases}$

II $D<0$

III $\begin{cases} t_{верш}>1 \\ F(1)>0 \end{cases}$

СМ НА СЛЕД ЛИСТ.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

216458

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 2

$$\begin{cases} \frac{2(a+b)}{2} < -1 \\ a^2+b^2-1+1+2a+2b-2>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b<-1 \\ a^2+2a+1+b^2+2b+1>4 \end{cases}$$

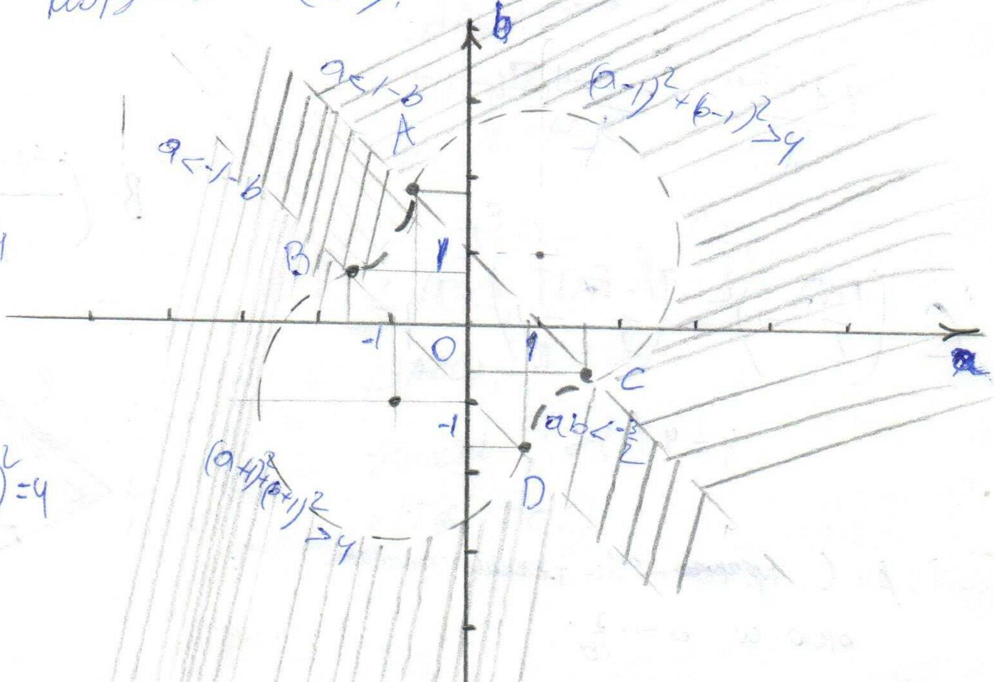
$$4(a+b)^2+4(3-a^2-b^2)<0 \qquad 4a^2+8ab+4b^2+12-4a^2-4b^2<0$$

$$\begin{cases} \frac{2(a+b)}{2} > 1 \\ a^2+b^2-1+1-2a-2b-2>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b>1 \\ a^2-2a+1+b^2-2b+1>4 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<-1-b \\ (a+1)^2+(b+1)^2>4 \end{cases} \\ 8ab<-12 \\ \begin{cases} a>1-b \\ (a-1)^2+(b-1)^2>4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Построим решение данных неравенств в координатах $(a;b)$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<-1-b \\ (a+1)^2+(b+1)^2>4 \end{cases} \\ ab<-\frac{3}{2} \\ \begin{cases} a>1-b \\ (a-1)^2+(b-1)^2>4 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-1-b \\ (a+1)^2+(b+1)^2=4 \end{cases} \\ a=-\frac{3}{2b} \\ \begin{cases} a=1-b \\ (a-1)^2(b-1)^2=4 \end{cases} \end{array}\right.$$



$ab<-\frac{3}{2}$

$a=0$

$b=0$

$0<-\frac{3}{2}$

~~ … ~~

A; C

$$\begin{cases} a = -\frac{3}{2b} \\ a = 1 - b \end{cases}$$

$-\frac{3}{2b} = 1 - b$

$2b^2 - 2b - 3 = 0$

$D = 4 + 24 = 28$

$b_1 = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{4} = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \quad a_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}$

$b_2 = \frac{2 - 2\sqrt{7}}{4} = \frac{1-\sqrt{7}}{2} \quad a_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}$

$A\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}; \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$

$C\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}; \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$

принадлежат ли A; C окр $(a-1)^2 + (b-1)^2 = 4$

$7 + 1 - 2\sqrt{7} + 7$

$A \cdot \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2} - 1\right)^2 = 4$

$\left(\frac{-\sqrt{7}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}\right)^2 = 4$

$\frac{7 + 2\sqrt{7} + 1}{4} + \frac{7 - 2\sqrt{7} + 1}{4} = 4$

$4 = 4$

$C \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2} - 1\right)^2 = 4$

$4 = 4$

A и C являются точками пересечения окр и $a = -\frac{3}{2b}$

B; D

$$\begin{cases} a = -\frac{3}{2b} \\ a = -1 - b \end{cases}$$

$-\frac{3}{2b} = -1 - b$

$2b^2 + 2b - 3 = 0$

$D = 28$

$b_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{7}}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \quad a_1 = -\frac{1 + \sqrt{7}}{2}$

$b_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{7}}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} \quad a_2 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2}$

$D\left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}; -\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$

$B\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{2}; \frac{\sqrt{7}-1}{2}\right)$.

принадлежат ли D; B $(a+1)^2 + (b+1)^2 = 4$

$D \left(\frac{-1 + \sqrt{7} + 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1 - \sqrt{7} + 2}{2}\right)^2 = 4$

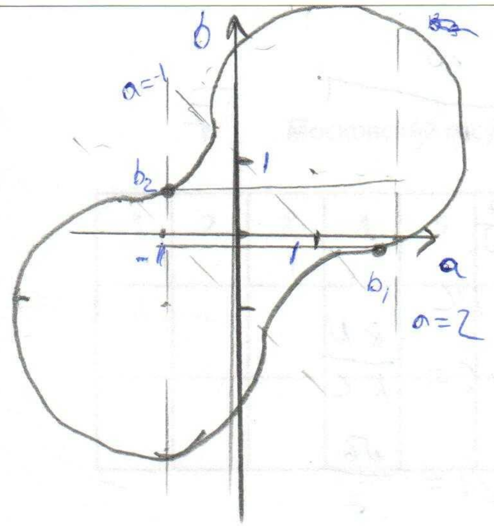
$\frac{7 + 1 + 2\sqrt{7} + 7 + 1 - 2\sqrt{7}}{4} = 4$

$4 = 4$

$B \left(\frac{-1 - \sqrt{7} + 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{7} + 2}{2}\right)^2 = 4$

$4 = 4$.

B и D являются точками пересечения окр и $a = -\frac{3}{2b}$



$b \in [b_1; b_2]$

20

b_2

$\begin{cases} a = -\frac{3}{2b} \\ a = -1 \end{cases}$ $\quad -1 = -\frac{3}{2b}$

$b = \frac{3}{2}$

~~b_1 $\begin{cases} a = -\frac{3}{2b} \\ a = 2 \end{cases}$ $2 = -\frac{3}{2b}$~~

b_1

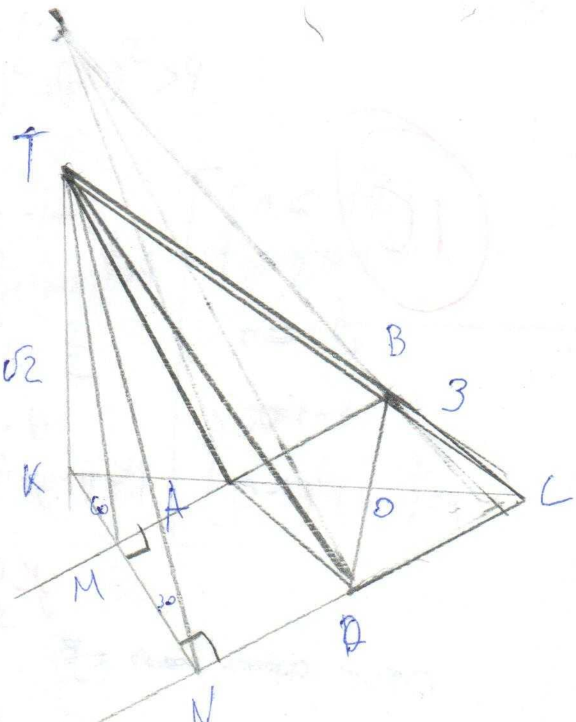
$\begin{cases} (a-1)^2 + (b-1)^2 = 4 \\ a = 2 \end{cases}$ $\quad (b-1)^2 = 3$

$\left[\begin{array}{l} b_1 = 1-\sqrt{3} \\ b_1 = 1+\sqrt{3} \end{array}\right.$ т.к. $b_1 < b_2$, то $b_1 = 1-\sqrt{3}$.

$b \in [1-\sqrt{3}; \frac{3}{2}]$

Ответ: $[1-\sqrt{3}; \frac{3}{2}]$.

№6



Дано:

TABCD - пир

ABCD - ромб

$TK = \sqrt{2}$

$KC = AB + AC$

$TC = 3$

$\angle (ABC), TD = 30°$

$\angle (ABC), TA = 60°$

Найти: AB - ?

$\angle TA, (TCD)$

Решение:

1). ~~△TKM - пр~~

KM =

$\angle (ADC), TD = \angle TMK$

$\angle (ADC), TA = \angle TMK$

2). △TMK - пр.

$TK \perp (ADC)$, $MK \in (ADC)$.

$\frac{TK}{MK} = tg\,60^\circ$

$MK = \frac{TK}{tg\,60^\circ}$

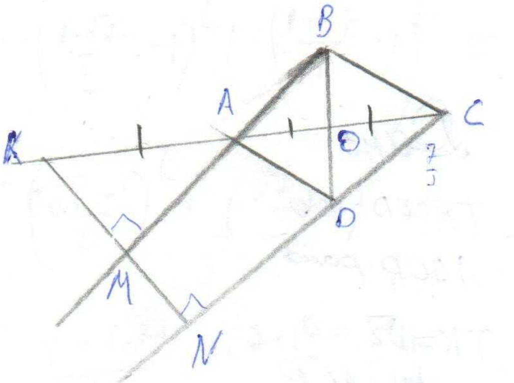
$MK = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

3). △TNK пр

$NK = \frac{TK}{tg\,30^\circ}$

$NK = \sqrt{6}$

4).



△KNC ∼ △KMA

$\angle K$ - общ

$\angle N = \angle M = 90^\circ$ (по построению)

$k = \frac{KM}{NK} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}$.

$\frac{KA}{KC} = \frac{1}{3}$

$\left.\begin{array}{l} KC = 3x \\ KA = x \end{array}\right\} \Rightarrow AC = 2x \Rightarrow AO = OC = x$.

5). △TKC - пр

$KC = \sqrt{9-2} = \sqrt{7}$

$OC = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

6). △KNC

$\sin\angle C = \frac{KN}{KC}$

$\sin\angle C = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

8). △ODC

$OD \perp CO$ (по св-ву диаг ромба)

$\cos\angle C = \frac{OC}{CD}$

$CD = \frac{OC}{\cos\angle C}$.

$\sin\angle C = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

$\cos\angle C = \sqrt{\frac{7-6}{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

$CD = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{1}{\sqrt{7}}}$

$CD = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{7} = \frac{7}{3}$.

10

Ответ: сторона ромба $= \frac{7}{3}$

угол?