Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

205083

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Мешка Мария Дмитриевна

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Якутск,

ГБНОУ РС(Я) РЛИ

Регистрационный номер 8433

Вариант задания 6

Дата проведения «24» февраля 2020 г.

Подпись участника Мешк

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

205083

(семьдесят пять)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего
12	12	16	15	20	–					75

Шифр ____________________
заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

205083

Вариант № 6.

1. Пусть сшили x юбок и y платьев.

Ткани первого вида израсходовано: $1,5x + 1,6y \leq 170$

Второго вида: $0,5x + 0,7y \leq 65$

Просуммируем 2 неравенства: $2x + 2,3y \leq 235$

$$x \leq \frac{235 - 2,3y}{2}$$

Доход будет равен: $5x + 12y \leq 587,5 - 5,75y + 12y = 587,5 + 6,25y$

Из уравнения дохода видно, что максимальное значение достигается при наибольшем y.

$$y \leq \frac{170}{1,6} < 107 \qquad y \leq \frac{65}{0,7} < 93$$

Максимальное значение $y = 92$.

$$\left.\begin{aligned} 0,5x + 0,7y = 0,5x + 64,4 \leq 65 &\Rightarrow x \leq 1,2 \\ 1,5x + 1,6y = 1,5x + 147,2 \leq 170 &\Rightarrow x \leq 15,2 \end{aligned}\right\} x_{max} = 1.$$

Макс. доход $= 5 + 12 \cdot 92 = 1109$ тыс. рублей.

Ответ: 1109 тыс. рублей.

12

2. При всех x^n в изначальном виде коэфф. равны 1.

Значит, чтобы вычислить коэфф. при x^{90} после приведения подобных членов, нужно посчитать кол-во получаемых x^{90} без приведения подобных членов.

$$(x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{90}) \cdot (x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{90}) \cdot (x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{90})$$

Нужно посчитать сколькими способами тремя числами от 0 до 90 ~~в сумме~~ можно получить в сумме 90.

Пусть эти 3 числа — это a, b и c.

Если $a=0$, то $b+c=90$. b — от 0 до 90, а $c=90-b$ (=91 вар)

Если $a=1$, то $b+c=89$ b — от 0 до 89, а $c=89-b$ (=90 вар).

...

Если $a=90$, то $b+c=0$, $b=0$, а $c=0-0=0$ (=1 вар).

Всего вариантов: $1+\ldots+90+91=\frac{91\cdot 92}{2}=4186$.

Значит коэфф. при $x^{90}=4186$.

Ответ: 4186. V

12

3. Пусть эти пять чисел таковы: $a\le b\le c\le d\le e$.

Наим. сумма $=a+b$, вторая наим $a+c$, т.к $a+c\le b+c$
$a\le b$.

Наиб. сумма $=d+e$, вторая наиб. $c+e$, т.к. $c+e\ge c+d$
$e\ge d$

Значит $a+b=7$ $a+c=8$ $d+e=28$ $c+e=23$

$c-b=8-7=1 \Rightarrow c=b+1$. $d-c=5 \Rightarrow d=c+5$.

Если просуммировать все попарные суммы, получаем сумму данных чисел, умноженную на 4, т.к. каждое число встречается в сумме с каждым другим — их 4.

$4(a+b+c+d+e)=7+8+11+13+16+17+19+22+23+28=164$.

$a+b+c+d+e=41$.

$c=41-(a+b)-(d+e)=41-7-28=6$.

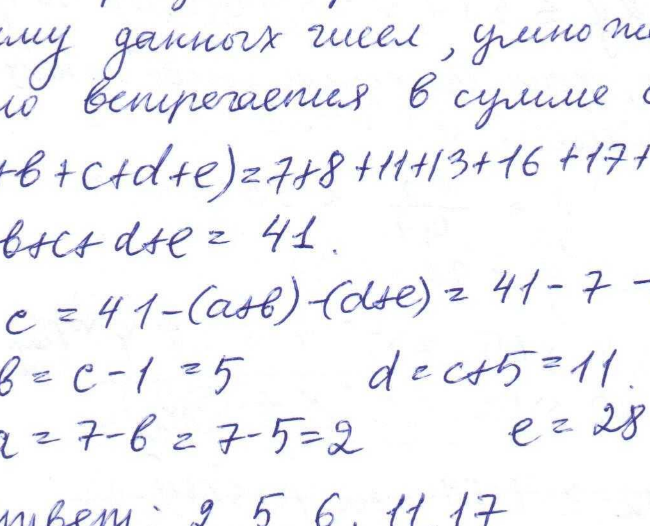
$b=c-1=5$ $d=c+5=11$.

$a=7-b=7-5=2$ $e=28-d=28-11=17$.

V 16

Ответ: 2, 5, 6, 11, 17.

4.



Пусть центр окружности, вписанной в $\triangle ABD$ и опис. около $\triangle ABC$ — O.

Пусть $\angle CAB=4\alpha$.

$\angle DAB=2\alpha$ (AD — биссектр)

т.к. O — центр впис. $\triangle ADB$, AO — биссектр. $\angle DAB$.

Значит $\angle OAB=\alpha$.

т.к. O — центр. опис. около $\triangle ABC$, $AO=OB \Rightarrow \angle OBA=\angle OAB=\alpha$.
$\triangle AOB$ — р/б

т.к. O - центр. впис окр $\triangle ABD$, BO - биссектр $\Rightarrow \angle DBA = 2\cdot\angle OBA = 2\alpha$

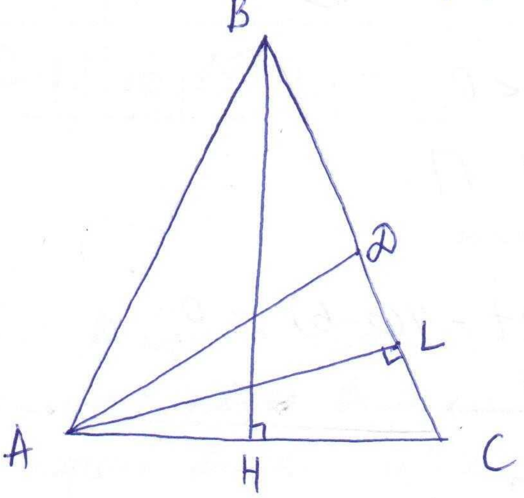
т.к. O - центр опис. окр. $\triangle ABC$ $OB = CO \Rightarrow \triangle COB$ - р/б $\Rightarrow \angle BCO = \angle CBO = \alpha$

также $CO = AO \Rightarrow \triangle COA$ - р/б $\Rightarrow \angle OCA = \angle OAC = 4\alpha - \alpha = 3\alpha$.

$\angle BCA = \angle BCO + \angle OCA = \alpha + 3\alpha = 4\alpha = \angle BAC$

$\Downarrow$

$\triangle ABC$ - р/б. $(AB=BC)$



BH - высота, медиана, биссектриса.

$\angle ABC + \angle BCA + \angle BAC = 2\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 10\alpha = 180^\circ$.

$\alpha = 18^\circ$.

~~$\angle ABC = 2\alpha = \angle BAD \Rightarrow \triangle BDA$ - р/б.~~

$\angle ABC = 2\alpha = \angle BAD \Rightarrow \triangle BDA$ - р/б $\Rightarrow BD = AD$.

$\angle ADC = 180^\circ - \angle DAC - \angle DCA = 10\alpha - 2\alpha - 4\alpha = 4\alpha$

$\angle ADC = \angle ACD \Rightarrow \triangle DAC$ - р/б $\Rightarrow AC = AD$.

Пусть AL - биссектриса, высота $\triangle DAC$.

$\angle LAC = \frac{\angle DAC}{2} = \alpha = 18$.

$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = 1 - 2\sin^2 36 = 1 - 2(2\sin 18\cdot\cos 18)^2 =$

$= 1 - 8\sin^2 18(1-\sin^2 18) = 1 - 8\sin^2 18 + 8\sin^4 18$.

Пусть $\sin 18 = t$. $\quad -1 \le t \le 1$.

также $\sin 0 < \sin 18 < \sin 30^\circ \Rightarrow 0 < t < \frac{1}{2}$

$8t^4 - 8t^2 - t + 1 = 0$.

$8t^2(t^2-1) - (t-1) = 0$

$8t^2(t-1)(t+1) - (t-1) = 0$

$(t-1)(8t^3 + 8t^2 - 1) = 0$. $\quad t \ne 1$.

$8t^3 + 8t^2 - 1 = 0$.

$(t + \frac{1}{2})(8t^2 + 4t - 2) = 0$ $\quad t \ne -\frac{1}{2}$.

$8t^2 + 4t - 2 = 0$.

$D = 16 + 64 = 80$

$t = \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{16}$, т.к $t > 0$, то $t = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$LC = AC\cdot\sin 18^\circ = AD\cdot\sin 18^\circ = (\sqrt{5}+1)\cdot\frac{(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{5-1}{4} = 1$

$AL = \sqrt{AC^2 - LC^2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5} + 1 - 1} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$

$S_{\triangle ABD} = \frac{AL \cdot BD}{2} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{5}+1)}{2} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}+1+5+2\sqrt{5}}}{2} =$ верно V

$= \frac{\sqrt{10+4\sqrt{5}+1}}{2} = \frac{\sqrt{(2\sqrt{5}+1)^2}}{2} = \frac{2\sqrt{5}+1}{2}$?

Ответ: $S_{\triangle ABD} = \frac{2\sqrt{5}+1}{2}$?

15

5. (1) $ctg^2 x - 4(a-b)\, ctg\, x + a^2 + b^2 - 18 < 0.$

$x \in [\pi/4; 3\pi/4] \Rightarrow ctg \in [-1; 1].$

пусть $ctg\, x = t.$

$(t^2 - 4(a-b)t + a^2 + b^2 - 18)' = 2t - 4(a-b) = 0$

$t = 2(a-b)$ — $-$ $2(a-b)$ $+$

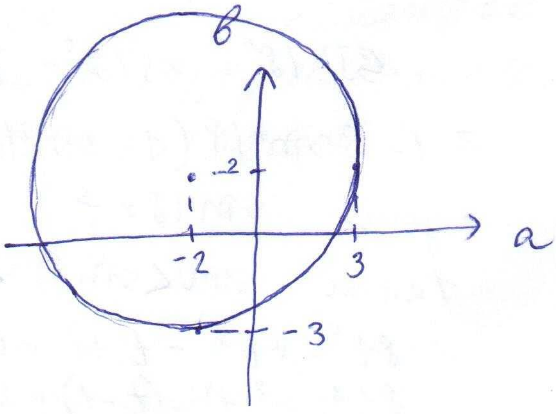
(1) Наиб. значение достигает при наим. или наиб. значении $t = ctg\, x$.

Для $ctg\, x = -1$.

$1 + 4(a-b) + a^2 + b^2 - 18 < 0.$

$a^2 + 4a + 4 + b^2 - 4b + 4 - 25 < 0.$

$(a+2)^2 + (b-2)^2 < 25$



$(a+2)^2$ достигает наиб. значения при $a = 2$. Для $a \in [-1; 2]$

~~$(-1+2)^2 + (b-2)^2 < 25$~~

~~$b < \sqrt{25-1} + 2 = 2\sqrt{6} + 2$~~

~~$(b-2)^2 < 24 \Rightarrow -2\sqrt{6} < b - 2 < 2\sqrt{6} \Rightarrow 2 - 2\sqrt{6} < b < 2\sqrt{6} + 2$~~

Для $a = 2$

$(b-2)^2 < 9 \Rightarrow -3 < b - 2 < 3 \Rightarrow -1 < b < 5$

~~В общем $-1 < b < 5$.~~

Для $ctg\, x = 1$.

$1 - 4(a-b) + a^2 + b^2 - 18 < 0.$

$a^2 - 4a + 4 + b^2 + 4b + 4 < 25$ $\quad (a-2)^2 + (b+2)^2 < 25.$

$(a-2)^2$ достигает наиб. зн. при $a = -1$. $(-1-2)^2 = 9$

$-4 < b + 2 < 4 \Rightarrow -6 < b < 2$

Чтобы выполнялось при любом заданном a и $ctg\, x$.

$-1 < b < 2$

Ответ: $b \in (-1; 2)$. V 20