Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

x 1
78

205010

Шифр ____________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
## на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Шерстюгина Анастасия Андреевна

Город, № школы (образовательного учреждения) Волжский, МОУ СШ №30

Регистрационный номер 5015

Вариант задания 13

Дата проведения «29» февраля 2020 г.

Подпись участника ____________

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

(семьдесят)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Всего |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |
| 12 | 12 | 16 | 20 | 5 | 5 | | | | | 70 |

Шифр 205010

*заполняется ответственным секретарем приемной комиссии*

5010

Вариант № 13

**№1**

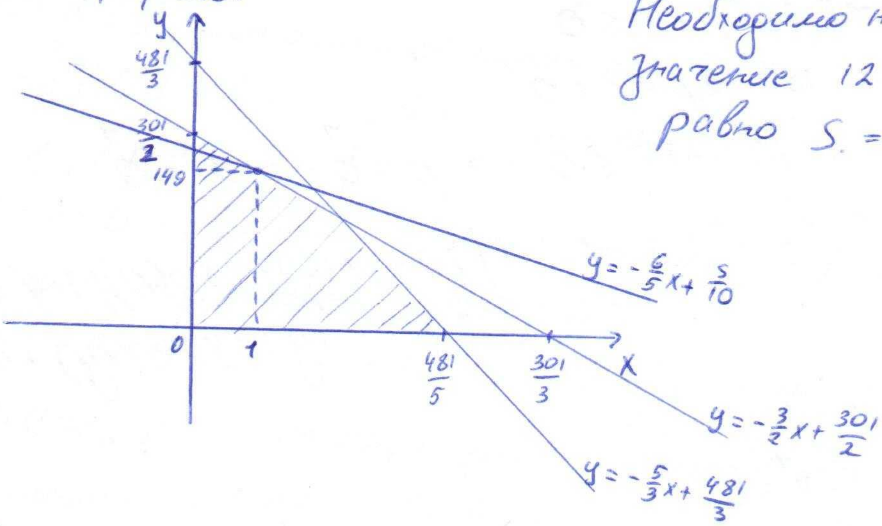
A
5 кг железа
3 кг проволоки
12 тыс. руб.
X штук

B
3 кг железа
2 кг проволоки
10 тыс. руб.
y штук

Всего имеем 481 кг железа и 301 кг проволоки $\Rightarrow 5x+3y \leq 481 \Leftrightarrow y \leq -\frac{5}{3}x + \frac{481}{3}$

$3x+2y \leq 301 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{2}x + \frac{301}{2}$

Изобразим график:




Необходимо найти максимальное значение $12x+10y$. Пусть оно равно $S$. $\Rightarrow 12x+10y=S$

$y = -\frac{6}{5}x + \frac{S}{10}$

Учитывая угол наклона прямых понимаем, что наибольшее $S$ достигается, когда прямая $y=-\frac{6}{5}x+\frac{S}{10}$ проходит через точку $(1;149) \Rightarrow$ 1 ~~деталь~~ трансфо. A и 149 ~~деталей~~ трансфо. B $\Rightarrow S = 12\cdot 1 + 10\cdot 149 = 1490 + 12 = 1502$ тыс. руб

Ответ: 1 трансформатор A
149 трансформаторов B ✓
Наибольшая прибыль 1502 тыс. руб

(12)

~~Ответ: 1502 тыс. руб~~
~~1 деталь A, 149 деталей B~~

**№3** Числа 2, 5, 7, 14, 15

2+5=7
2+7=9
2+14=16
2+15=17
5+7=12
5+14=19
5+15=20
7+14=21
7+15=22
14+15=29

(16)

Ответ: 2; 5; 7; 14; 15 ✓

№2 $(5-\cos 2(x+y)+4\sin(x+y))\log_2(3^x+3^{-x})\le 2$

$(5-(1-2\sin^2(x+y))+4\sin(x+y))\log_2(3^x+3^{-x})\le 2$

$(2\sin^2(x+y)+4\sin(x+y)+4)\log_2(3^x+3^{-x})\le 2$

Рассмотрим $2\sin^2(x+y)+4\sin(x+y)+4)$. Пусть $\sin(x+y)=t$, тогда $f(t)=2t^2+4t+4$. График функции - парабола, ветви направлены вверх ($2>0$). Координаты вершины $t_0=\frac{-4}{4}=-1$

$f_0(-1)=2-4+4=2$

$\Rightarrow f(t)\ge 2$ (*) $\Rightarrow \begin{cases} 2\sin^2(x+y)+4\sin(x+y)+4\ge 2 \\ (2\sin^2(x+y)+4\sin(x+y)+4)\log_2(3^x+3^{-x})\le 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2(3^x+3^{-x})\le 1$

$3^x+3^{-x}\le 2 \quad |\cdot 3^x\neq 0:$

$(3^x)^2-2(3^x)+1\le 0$

Пусть $3^x=p \Rightarrow p^2-2p+1\le 0$

$(p-1)^2\le 0 \Rightarrow p=1 \Leftrightarrow 3^x=1 \Rightarrow x=0$

При $x=0$: $\log_2(3^0+3^0)=1 \Rightarrow \begin{cases} 2\sin^2(x+y)+4\sin(x+y)+4\le 2 \text{ (из условия)} \\ 2\sin^2(x+y)+4\sin(x+y)+4\ge 2 \text{ (*)} \end{cases}$

$\Rightarrow 2\sin^2 y+4\sin y+4=2$

$\sin^2 y+2\sin y+1=0$

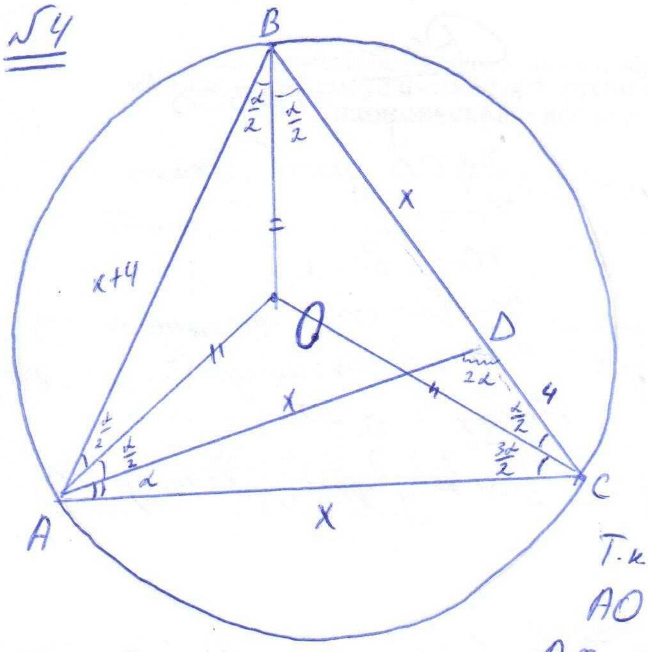
$(\sin y+1)^2=0$

$\sin y=-1 \Leftrightarrow y=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x=0$, $y=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

V 12

№4




Дано: $\triangle ABC$

т. O – центр описанной окружности около $\triangle ABC$

т. O – центр вписанной окружности $\triangle ABD$

$CD = 4$

AD – бис-са $\triangle ABC$

Найти: $S_{ABC}$ – ?

Решение:

1) Пусть $\angle DAC = \alpha$. Тогда $\angle BAD = \alpha$ (AD бис-са)
Т.к. т. O – центр вписанной окружности $\triangle ABD$, то AO – бис-са $\angle BAD \Rightarrow \angle BAO = \angle OAD = \frac{\alpha}{2}$

$AO = OB = R$ (т.к O центр описанной окружности $\triangle AOB$)

$\Rightarrow \triangle AOB$ равнобедренный $\Rightarrow \angle BAO = \angle ABO = \frac{\alpha}{2}$

т. O – центр вписанной окружности $\triangle ABD \Rightarrow$ BO бис-са $\angle ABD \Rightarrow \angle ABO = \angle OBD = \frac{\alpha}{2}$.

$BO = OC = R$ (O – центр описанной окружности $\triangle ABC$) $\Rightarrow \angle OBC = \angle OCB = \frac{\alpha}{2}$

$OA = OC = R$ (O центр описанной окружности $\triangle ABC$) $\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA = \frac{3\alpha}{2}$

2) $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha \Rightarrow \triangle ABC$ равнобедренный $\Rightarrow AB = BC$. Пусть $BD = x$, тогда $AB = x+4$

$\angle ADC = \angle ABC + \angle BAD = \alpha + \alpha = 2\alpha$ (внешний угол) $\Rightarrow \angle ADC = \angle ACD = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ADC$ равнобедренный $\Rightarrow AD = AC$

$\angle ABD = \angle BAD = \alpha \Rightarrow \triangle ABD$ равнобедренный $\Rightarrow AD = BD = x \mid \Rightarrow AC = x$

3) $\triangle ABC \sim \triangle ADC$ по двум углам: ~~$\angle ADC = \angle ACD = \angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$~~

$\angle ACD$ – общий, $\angle DAC = \angle ABC = \alpha \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CD} \Leftrightarrow \frac{x+4}{x} = \frac{x}{4}$

$x^2 - 4x - 16 = 0$, $D = 16 + 64 = 80 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 4\sqrt{5}}{2}$, но $x > 0 \Rightarrow x = 2 + 2\sqrt{5}$

4) $AB = BC = x + 4 = 6 + 2\sqrt{5}$, $AC = x = 2 + 2\sqrt{5}$

$p = \frac{AB+BC+AC}{2} = \frac{3x+8}{2} = \frac{6+6\sqrt{5}+8}{2} = 7+3\sqrt{5}$

Используем формулу Герона: $S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} =$

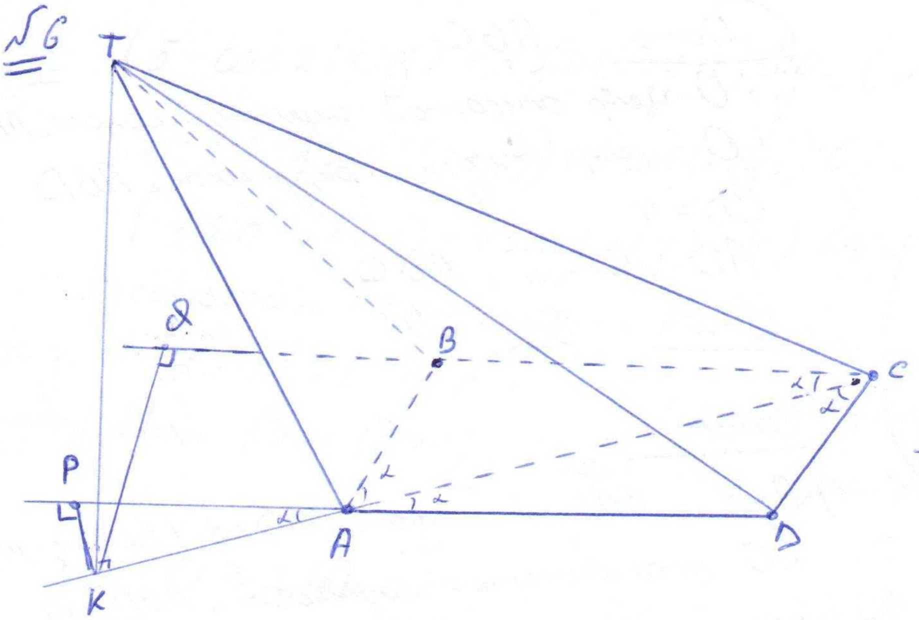
$= \sqrt{(7+3\sqrt{5})(7+3\sqrt{5}-6-2\sqrt{5})^2(7+3\sqrt{5}-2-2\sqrt{5})} = \sqrt{(6+2\sqrt{5}+1+\sqrt{5})(6+2\sqrt{5}-(1+\sqrt{5}))} \cdot$

$\cdot (1+\sqrt{5}) = \sqrt{(6+2\sqrt{5})^2 - (1+\sqrt{5})^2} \cdot (1+\sqrt{5}) = \sqrt{36+24\sqrt{5}+20-1-2\sqrt{5}-5}\,(1+\sqrt{5}) =$

$= \sqrt{50+22\sqrt{5}}\,(1+\sqrt{5})$

Ответ: $\sqrt{50+22\sqrt{5}} \cdot (1+\sqrt{5})$ V 20

№6

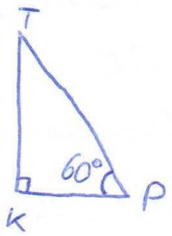



Дано:
Пирамида TABCD
ABCD - ромб, сторона a
$TK = 5$
$TC = 6\sqrt{5}$
Боковые грани наклонены к основанию под углами $30°$ и $60°$
Найти: $a$ - ?
Угол м/у $AB$ и $(TBC)$ - ?

Решение: 1) По т. Пифагора для $\triangle TKC$ ($TK \perp KC$ т.к. высота $TK$)
$\cancel{TC^2}$ $TK^2 + KC^2 = TC^2 \Rightarrow KC = \sqrt{TC^2 - TK^2}$
$KC = \sqrt{180-25} = \sqrt{155}$

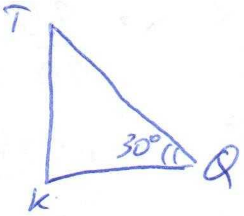
2) $KP \perp AD$ ($P \in AD$), $KQ \perp BC$ ($Q \in BC$)
$\triangle KPA \sim \triangle KQC$ по двум углам ($\angle KPA = \angle KQC = 90°$, $\angle QCK = \angle KAP = \alpha$, т.к. $AC$ бис-са $\angle BAD = \angle BCD$ ($ABCD$ ромб), а $\angle KAP$ и $\angle CAD$ вертикальные) $\Rightarrow \frac{KP}{KQ} = \frac{KA}{KC}$ (*)

3) Рассмотрим $\triangle TKP$:




$\angle TPK = 60°$ по условию
$\angle TKP = 90°$ $TK$ высота
$ctg\, 60° = \frac{KP}{TK} \Rightarrow KP = \frac{5}{\sqrt{3}}$

Рассмотрим $\triangle TKQ$:




$\angle TQK = 30°$ по условию
$\angle TKQ = 90°$ $TK$ высота
$ctg\, 30° = \frac{KQ}{TK} \Rightarrow KQ = 5\sqrt{3}$

4) (*): $\frac{KA}{KC} = \frac{KP}{KQ} = \frac{5}{\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow KA = \frac{KC}{3} = \frac{\sqrt{155}}{3}$

5) $AC = KC - KA = \sqrt{155} - \frac{\sqrt{155}}{3} = \frac{2\sqrt{155}}{3}$

?

5

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |

205010

Шифр ____________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 13

**№5** $tg^2x + 4(a+b)\,tg\,x + a^2 + b^2 - 18 < 0$

* выполняется при $x \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ $\Rightarrow t_1 \le -1$ и $t_2 \ge 1$

$tg\,x = t$: $t^2 + 4(a+b)t + a^2 + b^2 - 18 < 0$

$D = 16a^2 + 32ab + 16b^2 - 4a^2 - 4b^2 + 72 =$

$= 12a^2 + 12b^2 + 32ab + 72$

$t_1 = \frac{-4(a+b) - \sqrt{12a^2+12b^2+32ab+72}}{2} = -2(a+b) - \sqrt{3a^2+3b^2+8ab+18} \le -1$

$t_2 = \frac{-4(a+b) + \sqrt{12a^2+12b^2+32ab+72}}{2} = -2(a+b) + \sqrt{3a^2+3b^2+8ab+18} \ge 1$

1) $\begin{cases} \sqrt{3a^2+3b^2+8ab+18} \ge 1-2(a+b) \\ 3a^2+3b^2+8ab+18 \ge 0 \\ 1-2(a+b) \ge 0 \end{cases}$ $\Rightarrow 3a^2+3b^2+8ab+18 \ge 1+4a^2+8ab+4b^2-4a-4b$

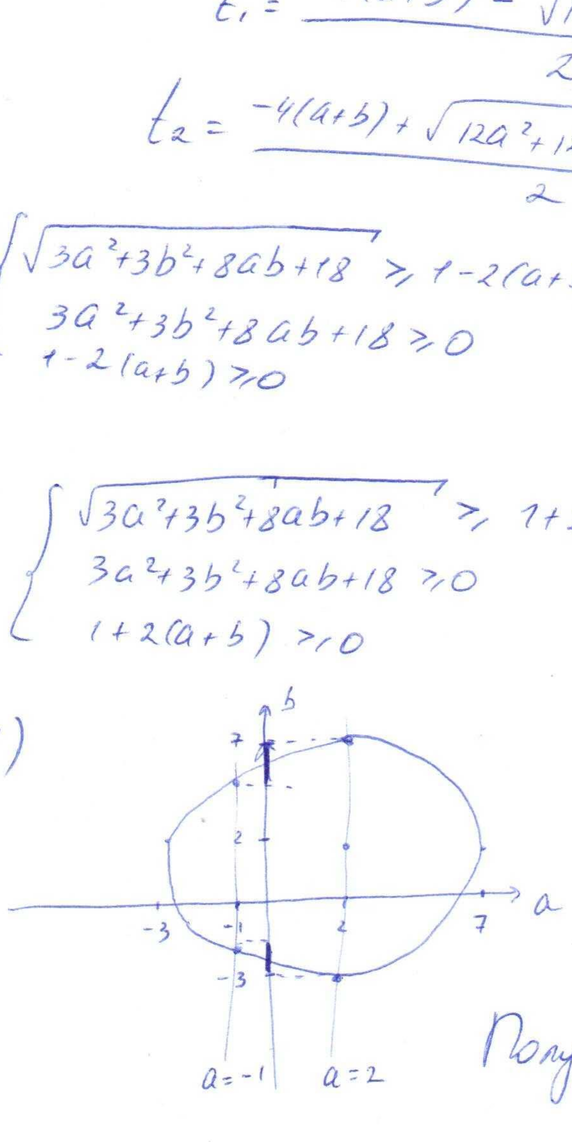
$a^2+b^2-4a-4b-17 \le 0$

$\cancel{a^2}\ (a-2)^2+(b-2)^2 \le 25$ ✓ (1)

2) $\begin{cases} \sqrt{3a^2+3b^2+8ab+18} \ge 1+2(a+b) \\ 3a^2+3b^2+8ab+18 \ge 0 \\ 1+2(a+b) \ge 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \cancel{a^2}\ 3a^2+3b^2+8ab+18 \ge 1+4a^2+8ab+4b^2+$
$+4a+4b$

$(a+2)^2+(b+2)^2 \le 25$ (2)

(1)



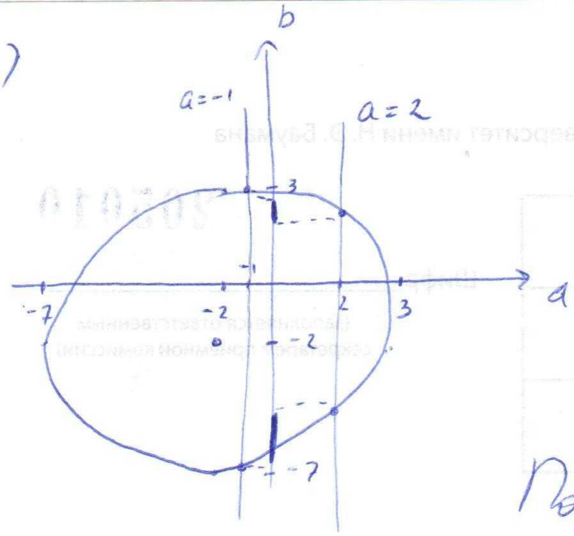

При $a=-1$: $(b-2)^2 \le 16$

$\left[\begin{array}{l} b-2 \le 4 \\ b-2 \ge -4 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} b \le 6 \\ b \ge -2 \end{array}\right.$

При $a=2$: $\cancel{b+2}\ (b-2)^2 \le 25$ $\left[\begin{array}{l} b \le 7 \\ b \ge -3 \end{array}\right.$

Получаем $b \in [-3; -2] \cup [6; 7]$ ?

(2)




При $a=-1: (b+2)^2 \le 24$ $\left[\begin{array}{l} b+2 \le \sqrt{24} \\ b+2 \geq -\sqrt{24} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} b \le 2\sqrt{6}-2 \\ b \geq -2-2\sqrt{6} \end{array}\right.$

При $a=2: (b+2)^2 \le 9$ $\left[\begin{array}{l} b+2 \le 3 \\ b+2 \geq -3 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} b \le 1 \\ b \geq -5 \end{array}\right.$

Получаем $[-2-2\sqrt{6}; -5] \cup [1; 2\sqrt{6}-2]$

Ответ: $[-3; -2] \cup [6; 7]$

$[-2-2\sqrt{6}; -5] \cup [1; 2\sqrt{6}-2]$ !?