+1 лист

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

215868

Шифр ____________________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Прасковьин Арсений Дмитриевич

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Самара МБОУ СМАЛ 10

Регистрационный номер 8576

Вариант задания ____________________

Дата проведения "16" февраля 2020г.

Подпись участника ____________________

70 (семьдесят)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12	16	20	5	5					
										70

Шифр 215868

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 2

№1

Петя - на мопеде $v_п$ - скорость Пети

Вася - на велосипеде $v_В$ - скорость Васи

Пусть x - расстояние от A до B

Автобус за 4,5 часа (12,5-8) проезжает 3x $\Rightarrow v_{авт} = \frac{2x}{3}$

Петя за то же время проезжает расстояние в 3 раза меньше

$\Rightarrow v_п$ в 3 раза меньше $v_{авт}$; $v_п = \frac{2x}{9}$

Время, которое прошло от начала пути до 2 встречи автобуса с Васей $= \frac{15}{4}$ ч ; $S_B = 0,5x$ то же время потребовалось автобусу, чтобы проехать 2,5x $S = (11\frac{3}{4} - 8) \cdot \frac{2}{3} = 2,5x$

т.к. это вторая встреча Васи с автобусом, Вася проехал 0,5x

$t_В = t_а$ $\quad \frac{2,5x}{\frac{2x}{3}} = \frac{0,5x}{v_В}$ $\quad v_В = \frac{0,5x \cdot 2x}{2,5x \cdot 3} = \frac{2x}{15}$

12

$\frac{v_В}{v_П} = \frac{2x}{15} : \frac{2x}{9} = \frac{3}{5}$

Ур-ние для движения автобуса из B в A в первый раз $= x - \frac{2x}{3}(t - 1,5)$

Ур-ние для Васи $= \frac{2x}{15} t$

приравняем их, чтобы найти t:

$x - \frac{2x}{3}\left(t - \frac{3}{2}\right) = \frac{2x}{15} t$ $\quad t = 2,5$ ч. Общее $t = 8 + 2,5 = 10$ ч 30 мин

Ответ: $\frac{3}{5}$; 10 ч 30 мин;

№2

$$x^2y^2+y^2z^2+x^2+z^2-44(xy+z)-46(yz+x)+4xyz+1013\le 0$$

$xy+z=t$

$x^2y^2+z^2=t^2-2xyz$

$yz+x=q$

$y^2z^2+x^2=q^2-2xyz$

$t^2-44t+q^2-46q+1013\le 0$

$(t-22)^2+(q-23)^2\le 0$

$$\begin{cases} xy+z=22 \\ yz+x=23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-1)(z-x)=1 \\ xy+z=22 \end{cases}$$

вычтем из 2 ур-ния первое

$\rightarrow$ т.к. числа целые, то либо обе скобки $=1$, либо обе скобки $=-1$

из первого $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2 \\ z=1+x \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ z=x-1 \end{cases} \end{array}\right.$ Подставляем во второе

$2x+1+x=22$

$x=7$

$z=8$

$y=2$

или

$x-1=22$

$x=23$

$z=22$

$y=0$

12

Ответ: $(x;y;z)=(7;2;8);(23;0;22)$

№3

$$\frac{64x^4+1}{8\sqrt{2}} \leq 4x\sqrt{x^4-\frac{1}{64}}$$

ОДЗ из этого ~~др-я~~ нер-ва:

$x^4 \geq \frac{1}{64}$

$\left[\begin{array}{l} x^2 \geq \frac{1}{8} \\ x^2 \leq -\frac{1}{8} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ x \leq -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right.$

Домножим обе части нер-ва на $8\sqrt{2}$ и перенесем всё в правую часть

$64x^2+1-4\sqrt{2}x\sqrt{64x^4-1} \leq 0$ Сделаем замену: $\sqrt{64x^4-1}=t$ $t \geq 0$

$t^2+2=64x^4+1$

$t^2+2-4\sqrt{2}xt \leq 0$

$D=32x^2-8 \geq 0$ Новое ограничение на x: $\left[\begin{array}{l} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Иначе корней нет и нер-во не имеет решений

$t_{1,2}=2\sqrt{2} \pm \sqrt{8x^2-2}$

1) Во-первых, заметим, что $t \geq 0 \Rightarrow$ правый корень ур-ния ≥ 0

2) Кроме того, если левый корень ≤ 0, то $t \in [0; 2\sqrt{2}x+\sqrt{8x^2-2}]$,

иначе $t \in [2\sqrt{2}x-\sqrt{8x^2-2}; 2\sqrt{2}x+\sqrt{8x^2-2}]$

Разберем 1:

$2\sqrt{2}x+\sqrt{8x^2-2} \geq 0$

$2\sqrt{2}x \geq -\sqrt{8x^2-2}$ Если $x \geq \frac{1}{2}$ ~~решение~~ нер-во выполняется.

иначе

$-2\sqrt{2}x \leq \sqrt{8x^2-2}$ – обе части $> 0 \Rightarrow$ можно возвести^2

$0 \leq -2$ – такого быть не может $\Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

② Если $2\sqrt{2}x - \sqrt{8x^2-2} \le 0$

$2\sqrt{2}x \le \sqrt{8x^2-2}$; $x \ge \frac{1}{2}$ – можно возвести ^{2}

$0 \le -2$

$\varnothing$

$\Rightarrow$ возможен случай $2\sqrt{2}x - \sqrt{8x^2-2} \ge 0$

делаем обратную замену

$$\begin{cases} \sqrt{64x^4-1} \le 2\sqrt{2}x + \sqrt{8x^2-2} \\ \sqrt{64x^4-1} \ge 2\sqrt{2}x - \sqrt{8x^2-2} \end{cases}$$

Все части $\ge 0 \Rightarrow$ возводим в ^{2}

$$\begin{cases} 64x^4-1 \le 8x^2 + 8x^2 - 2 + 4\sqrt{2(8x^2-2)} \\ 64x^2-1 \ge 16x^2 - 2 - 4\sqrt{2(8x^2-2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(16x^4-4x^2)+1 \le 4\sqrt{(16x^4-4x^2)} \\ (8x^2-1)^2 \ge -4\sqrt{(16x^4-4x^2)} \end{cases}$$

– всегда, т.к правая часть ≥ 0, а л.ч. ≤ 0

$4(16x^4-4x^2)+1 \le 4\sqrt{16x^4-4x^2}$

делаем замену $q = \sqrt{16x^4-4x^2}$

$q^2 = 16x^4-4x^2$

16

$4q^2-4q+1 \le 0$

$(2q-1)^2 \le 0$ $\quad q = \frac{1}{2}$ $\quad \sqrt{16x^4-4x^2} = \frac{1}{2}$ +

$64x^4-16x^2-1=0$

т.к $x \ge \frac{1}{2}$

$(8x^2-1)^2 = 2$

$\frac{\sqrt{2}+1}{8} \vee \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}+1}{8} > \frac{1}{4}$

$8x^2-1 = \sqrt{2}$

$x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{8}$ $\quad x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{8}}$ +

Ответ: $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{8}}$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

215868

Шифр

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

№4

Вариант № 2

$23^n + 5^n - 4^n(3^n + 4^n) \;\vdots\; 77$

$23^n + 5^n - 12^n - 16^n$

сгруппируем:

$(23^n - 12^n) + (5^n - 16^n)$

Очевидно, что $a^n - b^n \;\vdots\; (a-b)$ — по Ф.С.У. $\Rightarrow$

$23^n - 12^n \;\vdots\; 11$ $\quad 5^n - 16^n \;\vdots\; 11 \Rightarrow$ оба слагаемых $\vdots\; 11 \Rightarrow$ сумма $\vdots\; 11$

$23 \equiv 2 \pmod 7$

$\Rightarrow 23 = 3\cdot 7 + 2 \Rightarrow$

$23^n = (3\cdot 7 + 2)^n$ — по разложению бинома Ньютона

$23^n \equiv 2^n \pmod 7$

$16 \equiv 2 \pmod 7$

$\Rightarrow 16 = 7\cdot 2 + 2 \Rightarrow 16^n = (7\cdot 2 + 2)^n$ — по раз-нию Б. Ньютона

$16^n \equiv 2^n \pmod 7$

$+12 \equiv -2 \pmod 7$

$12 = 7\cdot 2 - 2 \Rightarrow 12^n = (7\cdot 2 - 2)^n$ — по раз-нию Б. Ньютона

$12^n \equiv (-2)^n \pmod 7$

$5 \equiv -2 \pmod 7$

$5 = 7 - 2 \Rightarrow 5^n = (7-2)^n$ — по р-нию Б. Ньютона

$5^n \equiv (-2)^n \pmod 7$

при n — четная

$23^n = 7q + 2^n$

$-16^n = -7z - 2^n$

$-12^n = -7x - 2^n$

$5^n = 7y + 2^n$

складывая 2^n — уходят $\Rightarrow$ сумма $\vdots\; 7$

при n — нечетная

$$\left.\begin{aligned} 23^n &= 7q + 2^n \\ -16^n &= -7z - 2^n \\ -12^n &= -7x + 2^n \\ 5^n &= 7y - 2^n \end{aligned}\right\}$$ при сложении 2^n уходят $\Rightarrow$ сумма $\vdots\; 7$

20

ч.т.д.

№5

$x^2-2x+2(a+b+1)\sqrt{-x^2+2x+3} < a^2+b^2+2a$

ОДЗ: $x \in [-1; 3]$

Сделаем замену:

$\sqrt{-x^2+2x+3} = t$

$t^2 = -x^2+2x+3$

$-t^2+2(a+b+1)t-3-a^2-b^2-2a<0$ *

Исследуем функцию

$y=\sqrt{-x^2+2x+3}$

$y_{max}=2$

$y_{min}=0$ $\Rightarrow$ если „левый" корень н-ва (*) будет левее „0" на коорд. прямой, а „правый" правее „2" на коорд прямой — нер-во будет выполняться для всех „x". Найдем такие „b" и в ответ выпишем другие.

* $D=4(a+b+1)^2-4(a^2+b^2+2a+3)$

$D=8b+2ab-8$

$$t_{12}=\frac{-2a-2b-2\pm2\sqrt{2(b+ab-1}}{-2}$$

$t_{12}=a+b+1\pm\sqrt{2(b+ab-1)}$

$$\begin{cases} a+b+1+\sqrt{2(b+ab-1)} \geq 2 \\ a+b+1-\sqrt{2(b+ab-1)} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2(b+ab-1)} > -a-b+1 & (1) \\ -\sqrt{2(b+ab-1)} < -a-b-1 & (2) \end{cases}$$

(1) при $b \geq 0$

$2b+2ab-2 > a^2+b^2+1+\cancel{2ab}-2a-2b$? ≥ 0 ?

$b^2-4b+a^2-2a+3<0$

$D=16-4(a^2-2a+3)=4(a^2-2a-1)>0$ $b\geq 0$

при $b<0$

всегда (п.ч ≥ 0 л.ч. <0)

(2) $b \leq -2$

всегда (п.ч ≤ 0 ; л.ч ≥ 0)

$b > -2$

$\sqrt{2(b+ab-1)} > a+b+1$

$\cancel{2b}+\cancel{2ab}+2 > a^2+b^2+1+2a+\cancel{2ab}+\cancel{2b}-1$ ≥ 0 ?

$a^2+b^2+2a-1 \leq 0$

a^2+2a-1 (при $a\in[-1;1]$) $\in[-3;2]$

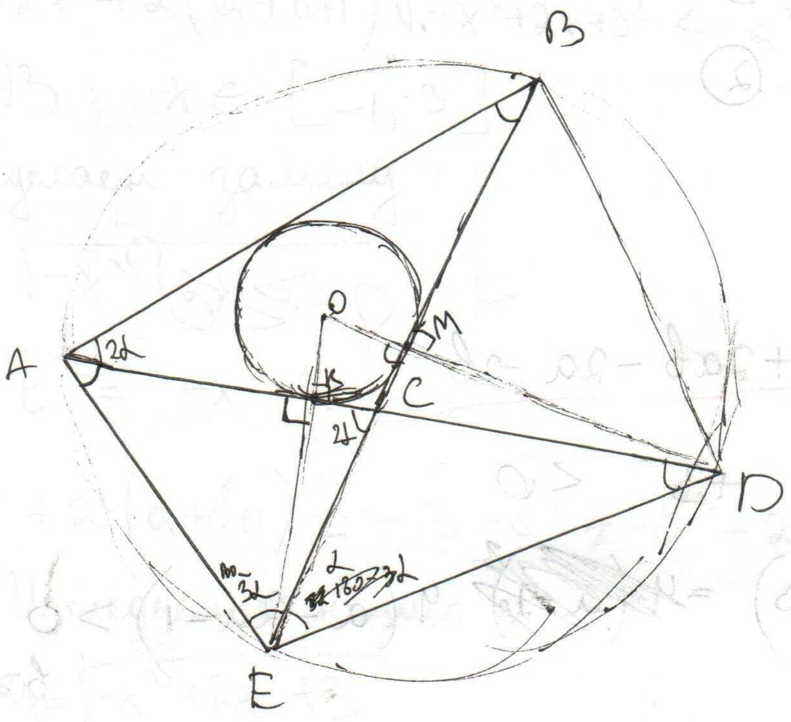
выполняется не при всех „а"

Ответ: $(-2;+\infty)$

5

№6

Найти:
$\sin\angle BCA = ?$



Решение.

$\angle ABE = \angle ADE$ — как впис. на одной дуге ? Точка — перпенди-куляр? ?Д-во?

(.)K — середина AD $(AK = KD)$ и перпендикуляр?

т.к. O — точка перес сер-пер Δ-ка AED, а он р/б =>

OE — сер.пер. и т.д.

OD — сер.пер. т.к. O — точка перес сер перп Δ-ка AED

=> KOMC — впис, т.к. сумма противолеж. углов = 180

=> $\sin\angle EOD = \sin\angle ACB$

5

$\angle EBD = \angle EAD$ — как впис на 1 дуге =>

$\angle EOD$ — центр $\angle EAD$ — впис $= \alpha$ => $\angle EOD = 2\alpha$

=> $\angle ABC = 180 - 2\alpha = \angle ECD$

$\angle CED = 180 - \angle ECD - \angle CDE = \alpha$

=> $\Delta AED \sim \Delta DEC$ — по 2-м углам =>

$\angle AED = \angle ECD = 180 - 2\alpha$

$\angle ACE = \angle ECD - \alpha = 180 - 3\alpha$

Ответ: $\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\angle BAC = 2\alpha$, т.к. $\Delta ACE \sim \Delta BEA$ — по 2-м углам.