Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1
шифр

Шифр 215917
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Коньков Дмитрий Алексеевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Иваново, МБОУ „Лицей №33"

Регистрационный номер 7906

Вариант задания 5

Дата проведения «24» февраля 2020 г.

Подпись участника Коньков

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

72 (семьдесят два)

215917

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего
9	12	16	15	—	20					
										72

Шифр ____________
заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

215917

Вариант № 5

№ 1.

Пусть было x вещества в 1 пробирке. Тогда после выливания $\frac{1}{4}$ части и добавления воды останется $\frac{3}{4}x$ вещества в 1 пробирке. Тогда после 4 таких операций в первой пробирке осталось $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot 200$мл вещества. Тогда концентрация в 1 пробирке стала $\frac{\left(\frac{9}{16}\right)^2 \cdot 200\text{мл}}{200\text{мл}} = \left(\frac{9}{16}\right)^2$.

Пусть было $\frac{4}{x}$? вещества во 2 пробирке. Тогда после выливания k части и добавления воды останется $(1-k)x$? вещества во 2 пробирке. Тогда после 2 таких операций во 2 пробирке осталось $(1-k)^2 \cdot 200$мл вещества. x — ?

Тогда концентрация во 2 пробирке стала $\frac{(1-k)^2 \cdot 200\text{мл}}{200\text{мл}} = (1-k)^2$.

По условию $\frac{\left(\frac{9}{16}\right)^2}{(1-k)^2} = \frac{9}{16}$

$\frac{9}{16} = (1-k)^2$, т.

$1-k = \frac{3}{4}$, т.к. $k < 1$.

$k = \frac{1}{4}$.

9

Кол-во, а не доля? И не какую часть!

Ответ: каждый раз отливали $\frac{1}{4}$ часть смеси из второй пробирки.

№ 2.

$$A = \frac{-2^1+2^2-2^3+2^4-2^5+\ldots+2^8-2^9+2^{10}}{2^{-1}-2^{-2}+2^{-3}-2^{-4}+\ldots+2^{-9}-2^{-10}}$$

$$A = 2^{11} \cdot \left(\frac{2^{10}-2^9+2^8-2^7+2^6-2^5+2^4-2^3+2^2-2^1}{2^{10}-2^9+2^8-2^7+2^6-2^5+2^4-2^3+2^2-2^1} \right)$$

12

$A = 2^{11} = 1024 \cdot 2 = 2048.$

$$\begin{array}{r|l} 2048 & 11 \\ \underline{11} & 186 \\ 94 & \\ \underline{88} & \\ 68 & \\ \underline{66} & \\ 2 & \end{array}$$

остаток 2.

Ответ: A при делении на 11 даёт остаток 2. ✓

№3

$$\frac{(|x+1| \mp |x-1|)(x^3-7x^2+36)}{x^8+2x^6-6x^4+2x^2+1} \geq 0$$

$$\frac{(|x+1| \mp |x-1|)(x-6)\cancel{(x-3)(x+2)}(x^2-x-6)}{(x^2-1)(x^6+3x^4-3x^2-1)} \geq 0$$

пусть $|x+1| \mp |x-1| = t$.

$$\frac{t(x-6)(x+2)(x-3)}{(x^2-1)^2(x^4+4x^2+1)} \geq 0.$$

$x^4 \geq 0;\ 4x^2 \geq 0,\ 1>0$, тогда $x^4+4x^2+1>0$ при любых $x \in R$.

$(x^2-1)^2>0$ при любых $x \in R$, кроме $x=1$ и $x=-1$.

при $x=1$ и $x=-1$ знаменатель обращается в 0.

$$\begin{cases} t(x-6)(x+2)(x-3) \geq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

при $x<-1$ $\quad |x+1|-|x-1| = -x-1-(1-x) = -2<0$.

при $x>1$ $\quad |x+1|-|x-1| = x+1-x+1 = 2>0$

при $-1<x<0$ $\quad |x+1|-|x-1| = x+1-(1-x) = 2x<0$.

при $x=0$ $\quad |x+1|-|x-1| = |1|-|-1| = 1-1=0$

при $0<x<1$ $\quad |x+1|-|x-1| = x+1-(1-x) = 2x>0$.

тогда

$$\begin{cases} (|x+1|-|x-1|)(x-6)(x+2)(x-3) \geq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

✓

$+\ \ -2\ \ -\ \ -1\ \ -\ \ 0\ \ +\ \ 1\ \ +\ \ 3\ \ -\ \ 6\ \ +\ \ x$

$x \in (-\infty; -2] \cup [0;1) \cup (1;3] \cup [6;+\infty)$.

16

Ответ: $(-\infty;-2] \cup [0;1) \cup (1;3] \cup [6;+\infty)$. ✓

№4.

$$\sqrt{x+\sqrt{x}-\frac{71}{16}} \mp \sqrt{x+\sqrt{x}-\frac{87}{16}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}-\frac{79}{16}+\frac{1}{2}} \mp \sqrt{x+\sqrt{x}-\frac{79}{16}-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$x+\sqrt{x}-\frac{79}{16} = t$.

$$\sqrt{t+\frac{1}{2}} \mp \sqrt{t-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$\geq 0?$

$$\begin{cases} t+\frac{1}{2}+t-\frac{1}{2}-2\sqrt{(t+\frac{1}{2})(t-\frac{1}{2})}=\frac{1}{4} \\ t\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t-\frac{1}{4}=2\sqrt{t^2-\frac{1}{4}} \\ t\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} t\ge\frac{1}{2} \\ 2t-\frac{1}{4}\ge 0 \\ (2t-\frac{1}{4})^2=4t^2-4\cdot\frac{1}{4}\end{cases} \quad \begin{cases} t\ge\frac{1}{2} \\ t\ge\frac{1}{8} \\ 4t^2-t+\frac{1}{16}=4t^2-1\end{cases} \quad \begin{cases} t\ge\frac{1}{2} \\ t=\frac{17}{16}\end{cases} \quad t=\frac{17}{16}$$

$$x+\sqrt{x}-\frac{79}{16}=\frac{17}{16}$$

$$x+\sqrt{x}=\frac{96}{16}$$

$$x+\sqrt{x}=6$$

$$\sqrt{x}=6-x$$

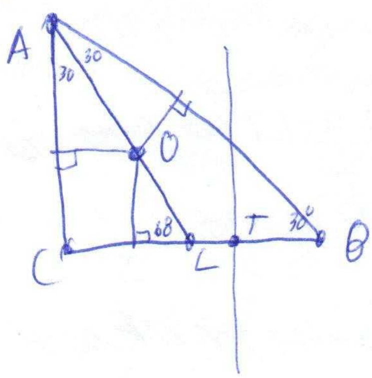
$$\begin{cases} x=(6-x)^2 \\ 6-x\ge 0\end{cases} \quad \begin{cases} x=36-12x+x^2 \\ x\le 6\end{cases} \quad \begin{cases} x^2-13x+36=0 \\ x\le 6\end{cases} \quad \begin{cases} (x-9)(x-4)=0 \\ x\le 6\end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=4\end{array}\right. \\ x\le 6\end{cases}$$

15

$x=4.$

Ответ: 4.

№6.



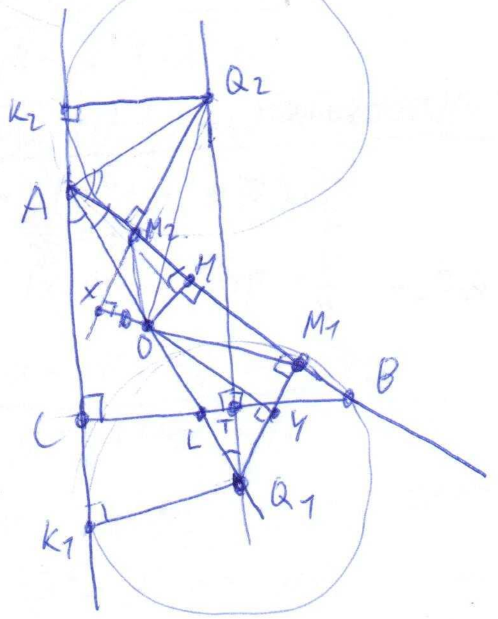
Дано:
$\triangle ABC$ — прямоугольный
$\angle C=90^\circ$
AL — биссектриса, $AL=4$.
$\angle A=60^\circ$
QT — серединный перпендикуляр к CB.
Q — центр окружности ω.
ω касается AC и AB в K и M.
O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности.
Найти: $S(OQM)$

Решение:

1) Так как $\angle A=60^\circ$, то $\angle CAL=30^\circ=\angle LAB$, т.к AL — биссектриса. Тогда $\angle ALC=60^\circ$; $\angle ABC=30^\circ$. Тогда в $\triangle ACL$ CK, где $\angle C=90^\circ$, $CL=\frac{1}{2}AL=2$, а $\triangle ALB$ — равнобедренный, так как $\angle LAB=\angle LBA=30^\circ$, тогда $AL=LB=4$.
Тогда $AC=AL\cdot\cos 30^\circ=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$. в $\triangle ACL$
Тогда $AC=AB\cdot\cos 60^\circ=\frac{AB}{2}$ в $\triangle ACB$.
$AB=4\sqrt{3}$.
Тогда $p=\frac{AB+CB+AC}{2}=\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{3}+6}{2}=3\sqrt{3}+3$.

2) $S(ABC)=\frac{AC\cdot CB}{2}=\frac{2\sqrt{3}\cdot 6}{2}=6\sqrt{3}$.
С другой стороны $S(ABC)=p\cdot r$, где r — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности.
$r=\frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+3}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3-1}=\frac{2\cdot 3-2\sqrt{3}}{2}=3-\sqrt{3}$.

Так как O – центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, то $O \in AL$, т.к. AL – биссектриса.



Возможны 2 случая расположения точки Q – Q_2 выше CB, или Q_1 ниже CB. Так как $Q_2K_2 = Q_2M_2$ и $Q_2K_2 \perp AC$ и $Q_2M_2 \perp AB$, и $K_2 \in AC$, $M_2 \in AM$, то AQ_2 – биссектриса угла K_2AM_2. Так как $Q_1K_1 = Q_1M_1$ и $Q_1K_1 \perp AC$ и $Q_1M_1 \perp AB$ и $K_1 \in AC$, $M_1 \in AB$, то AQ_1 – биссектриса угла K_1AM_1. Тогда $Q_1 \in AL$.

~~I случай: при Q_1~~.

~~CT~~ Тогда $CT = TB = 3$, так как CT – серпер к CB. Тогда $\triangle ACL \sim \triangle Q_1TL$ ~~по~~ по 2 углам, так как $\angle ACL = \angle LTQ_1 = 90^\circ$, $\angle ALC = \angle Q_1LT$ как вертикальные.

Тогда $\dfrac{LQ_1}{AL} = \dfrac{LT}{CL} = \dfrac{CT - CL}{CL} = \dfrac{3-2}{2} = \dfrac{1}{2}$ и $\angle LQ_1T = \angle CAL = 30^\circ$

$LQ_1 = \dfrac{AL}{2} = 2$.

А ~~Тогда~~ $AQ_1 = LQ_1 + AL = 6$. ~~Так~~. Тогда в $\triangle AQ_1K_1$, где $\angle AK_1Q_1 = 90^\circ$, $R_1 = K_1Q_1 = AQ_1 \cdot \sin\angle K_1AQ_1 = 6 \cdot \sin 30^\circ = 3$. ($R_1$ – радиус окружности ω_1, с центром в точке Q_1).

Так как AQ_2 – биссектриса $\angle K_2AM_2$, то $\angle Q_2AB = \frac{1}{2}\angle K_2AM_2 = \frac{1}{2}\cdot(180^\circ - \angle(AB)) = \frac{1}{2}\cdot 120^\circ = 60^\circ$. Тогда $\angle Q_1AQ_2 = \angle Q_1AB + \angle BAQ_2 = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$. Тогда в $\triangle Q_1AQ_2$ ~~А~~ $AQ_2 = Q_2Q_1 \cdot \sin\angle LQ_1T$

$AQ_1 = Q_2Q_1 \cdot \cos\angle LQ_1T$

$\dfrac{AQ_2}{AQ_1} = \dfrac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$ $\quad AQ_2 = 6 \cdot \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$

Тогда в $\triangle AQ_2M_2$, где $\angle AM_2Q_2 = 90^\circ$, $R_2 = M_2Q_2 = AQ_2 \cdot \sin\angle M_2AQ_2 = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

Тогда в обоих случаях получаются одинаковые радиусы, равные 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего

Шифр 215917

заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

Вариант № 5

~~Тогда $AH = AO$~~

$\triangle AOH \sim \triangle ACL$ по 2 углам, так как $\angle OAH = \angle CAL = 30^\circ$ и $\angle OHA = \angle ACL = 90$.

Тогда $\frac{OH}{CL} = \frac{AH}{AC}$

$AH = \frac{r \cdot AC}{CL} = \frac{(3-\sqrt{3})2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} - 3$

Тогда $AM_2 = AQ_2 \cdot \cos 60$ в $\triangle AM_2Q_2$, где $\angle AM_2Q_2 = 90^\circ$, $\angle M_2AQ_2 = 60$

$AM_2 = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$

Тогда $M_2H = AH - AM_2 = 3\sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3$.

Тогда $AM_1 = AQ_1 \cdot \cos 30^\circ$ в $\triangle AQ_1M_1$, где $\angle AM_1Q_1 = 90^\circ$, $\angle Q_1AM_1 = 30^\circ$

$AM_1 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Тогда $HM_1 = AH_1 - AH = 3\sqrt{3} - (3\sqrt{3} - 3) = 3$.

Д.п. $OX \perp M_2Q_2$ $X \in M_2Q_2$. Так как $M_2H \perp Q_2M_2$, то $OX \parallel M_2H$. Так как $OH \perp AB$ и $Q_2M_2 \perp AB$, то $OH \parallel M_2Q_2$. Тогда OXM_2H — параллелограмм.

Тогда $OX = M_2H = 2\sqrt{3} - 3$

Так как в $\triangle OM_2Q_2$ OX — высота, то $S(OM_2Q_2) = \frac{OX \cdot M_2Q_2}{2} = \frac{(2\sqrt{3}-3) \cdot 3}{2} = \frac{6\sqrt{3} - 9}{2} = 3\sqrt{3} - 4,5$

Д.п. $OY \perp Q_1B$, $Y \in Q_1B$. так как ~~Тогда~~ $OY \perp Q_1M_1$, $M_1H \perp Q_1M_1$, то $M_1H \parallel OY$. Так как $Q_1M_1 \perp AB$ и $OH \perp AB$, то $OH \parallel Q_1M_1$. Тогда ~~OAH~~ OYM_1H — параллелограмм.

Тогда $OY = HM_1 = 3$. Тогда $S(Q_1OM_1) = \frac{OY \cdot Q_1M_1}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4,5$.

Тогда $S(OQM) = 4,5$ или $S(OQM) = 3\sqrt{3} - 4,5$.

Ответ: $4,5$; $3\sqrt{3} - 4,5$.

20