+1 [illegible]

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

215930

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету Математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Гонобоблев Даниил Михайлович

Город, № школы (образовательного учреждения) Иваново, „Лицей №33"

Регистрационный номер 10834

Вариант задания 6

Дата проведения «24» февраля 20~~1~~20 г.

Подпись участника [illegible]

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

71 (семьдесят один)

215930

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего
3	12	16	20	∅	20					
										71

30

Шифр ____________

заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

Вариант № 6

N.4.

$$\sqrt{x-\sqrt{x}-\frac{7}{16}}-\sqrt{x-\sqrt{x}-\frac{23}{16}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{7}{16}+\frac{23}{16}}{2}=\frac{15}{16}$$

$$\sqrt{x-\sqrt{x}-\frac{15}{16}+\frac{8}{16}}-\sqrt{x-\sqrt{x}-\frac{15}{16}-\frac{8}{16}}=\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x-\sqrt{x}-\frac{15}{16}+\frac{1}{2}}-\sqrt{x-\sqrt{x}-\frac{15}{16}-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$x-\sqrt{x}-\frac{15}{16}=t$$

$$\sqrt{t+\frac{1}{2}}-\sqrt{t-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{t+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\sqrt{t-\frac{1}{2}}$$

$\sqrt{t+\frac{1}{2}}\geq 0$; $\frac{1}{2}+\sqrt{t-\frac{1}{2}}\geq 0$, возведём обе части уравнения в квадрат:

$$t+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{t-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{3}{4}=\sqrt{t-\frac{1}{2}}$$

$\frac{3}{4}\geq 0$; $\sqrt{t-\frac{1}{2}}\geq 0$, возведём обе части уравнения в квадрат:

$$\frac{9}{16}=t-\frac{1}{2}$$

$$t=\frac{17}{16}$$

$$x-\sqrt{x}-\frac{15}{16}=\frac{17}{16}$$

$x-\sqrt{x}-\frac{32}{16}=0$

$x-\sqrt{x}-2=0$

$\sqrt{x}=y$

$y^2-y-2=0$

$1-2=-1$, верное

Сумма коэффициентов при чётных степенях равна сумме коэффициентов при нечётных, значит, $y=-1$ - корень

$\left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=2 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=-1 \\ \sqrt{x}=2 \end{array}\right.$ корней нет, т.к. $\forall x \geq 0$ $\sqrt{x} \geq 0$, а для $x<0$ $\sqrt{x}$ - не имеет смысла

20

$\sqrt{x}=2$

$x=4$

Ответ: $x=4$.

№3.

$$\frac{(|x+2|-|2x-1|)(x-1)^2(x^3-7x^2+20)}{x^8+x^6-6x^4+x^2+4} \geq 0$$

$x^8+x^6-6x^4+x^2+4 = x^6-2x^4+x^2+x^8-4x^4+4 =$

$= x^2((x^2)^2-2x^2+1)+(x^4)^2-4x^4+4 = x^2(x^2-1)^2+(x^4-2)^2 = (x(x^2-1))^2 +$

$+(x^4-2)^2$

$\forall x \in R \quad (x(x^2-1))^2 \geq 0 \quad \forall x \in R \quad (x^4-2)^2 \geq 0$

$\forall x \in R \ (x(x^2-1))^2+(x^4-2)^2 \geq 0$

$(x(x^2-1))^2+(x^4-2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2-1)=0 \\ x^4-2=0 \end{cases}$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=1 \end{array}\right. \\ x^4-2=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ x^4-2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=1 \\ x^4-2=0 \end{cases} \end{array}\right.$

$0-2=0$ неверное

$1-2=0$ неверное

$\left[\begin{array}{l} \text{корней нет} \\ \text{корней нет} \end{array}\right.$ Корней нет

$\forall x \in R \quad (x(x^2-1))^2+(x^4-2)^2>0$

$$\frac{(|x+2|-|2x-1|)(x-1)^2(x^3-7x^2+20)}{x^8+x^6-6x^4+x^2+4} \geq 0 \quad \Big| \cdot (x^8+x^6-6x^4+x^2+4)$$

$(|x+2|-|2x-1|)(x-1)^2(x^3-7x^2+20) \geq 0$

$x^3-7x^2+20=0$ (1)

При $x=2$ $8-28+20=0$, верное, значит, $x=2$ - корень

$$\begin{array}{l|l} x^3-7x^2+20 & x-2 \\ \cline{2-2} -\ x^3-2x^2 & x^2-5x-10 \\ \hline \quad -5x^2+20 & \\ \quad -\ -5x^2+10x & \\ \hline \qquad -10x+20 & \\ \qquad -\ -10x+20 & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-5x-10=0 \ (2) \end{array}\right.$$

$x^2-5x-10=0$ (2)

$D=25+4\cdot 10=65>0$

$x=\frac{5\pm\sqrt{65}}{2}$

$|x+2|-|2x-1|=0$

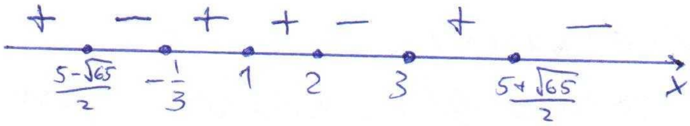
$|x+2|=|2x-1|=0$ (3)

$$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=2x-1 \\ x+2=-2x+1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$f(x)=(|x+2|-|2x-1|)(x-1)^2(x-2)\left(x-\frac{5+\sqrt{65}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{65}}{2}\right)$$

$D(f)=R$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\frac{1}{3} \\ x=1 \\ x=2 \\ x=\frac{5+\sqrt{65}}{2} \\ x=\frac{5-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right.$$



$\frac{5-\sqrt{65}}{2} \vee -\frac{1}{3}$ $|\cdot 6$

$15-3\sqrt{65} \vee -2$

$17 \vee 3\sqrt{65}$

$289 < 585 \Rightarrow \frac{5-\sqrt{65}}{2} < -\frac{1}{3}$

$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty; \frac{5-\sqrt{65}}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}; 2\right] \cup \left[3; \frac{5+\sqrt{6}}{2}\right.$

$\frac{5+\sqrt{65}}{2} \vee 3$

$5+\sqrt{65} \vee 6$

$\sqrt{65} \vee 1$

$65>1 \Rightarrow \frac{5+\sqrt{65}}{2}>3.$

16

Ответ: $x\in\left(-\infty; \frac{5-\sqrt{65}}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}; 2\right] \cup \left[3; \frac{5+\sqrt{65}}{2}\right]$

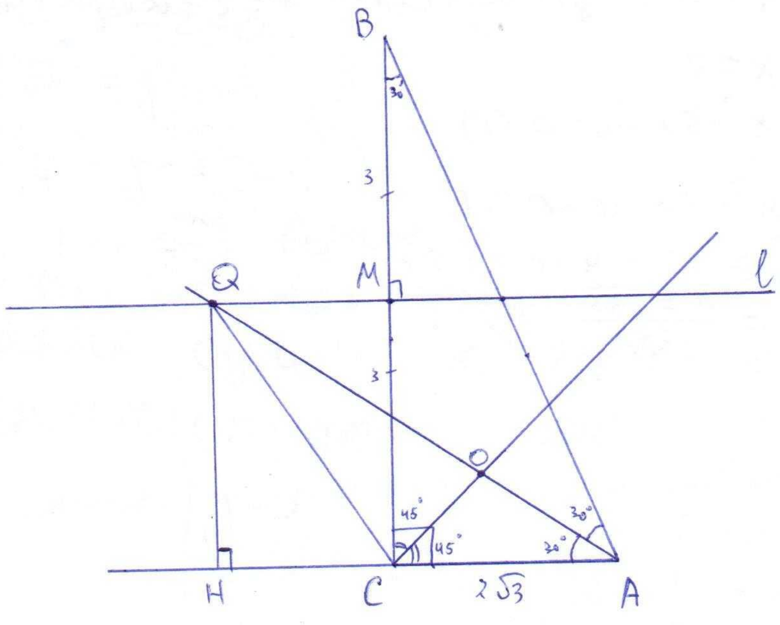
№5

$(x^2-a)^2+2(x^2-a)+(x-a)+2=0$ ~~2 различных решения~~

$(x^2-a)^2+2(x^2-a)+1+(x-a+1)=0$

$(x^2-a+1)^2+(x-a+1)^2=0$

N.6.



Дано:

$\triangle ABC$, $\angle C = 90°$

$BC = 6$, $\angle ABC = 30°$

l - серединный перпендикуляр к BC

$l \cap BC = M$

$Q \in l$, Окр$(Q; R)$ - касается AC и AB

Окр$(O; r)$ - вписана ~~описана~~ в ~~около~~ $\triangle ABC$

Найти:

$S(COQ)$

Решение:

1.) Т.к. Окр$(Q;R)$ - касается AC и AB, Q - равноудалена от AC и AB (радиусы одной той же окружности равны, радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной)

ГМТ, равноудалённых от сторон неразвёрнутого угла и лежащих внутри него является биссектриса этого угла. Значит, AQ - биссектриса $\angle CAB$.

Т.к. O - центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, O - точка пересечения биссектрис $\triangle ABC$. Тогда $O \in AQ$, CO - биссектриса $\angle BCA$.

2.) $\angle QAC = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}(90° - \angle CBA) = 30° = \angle CBA = \angle QAB$

3.) $S(COQ) = S(CQA) - S(COA)$

$\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $tg\angle CBA = \frac{AC}{BC}$; $AC = BC\, tg\angle CBA$

$AC = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

4.) $\triangle COA$, по теореме синусов:

$$\frac{CO}{\sin\angle CAO} = \frac{AC}{\sin\angle COA}$$

$$\frac{CO}{\sin 30°} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin(180° - 45° - 30°)}$$

$$\frac{CO}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin(45° + 30°)}$$

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего

Шифр 215930

заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

Вариант № 6

$$2CO = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$CO = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}};\quad CO = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} =$$

$$= 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$$

5.) $S(COA) = \frac{1}{2} CO \cdot AC \cdot \sin\angle OCA$

$S(COA) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot(3\sqrt{2}-\sqrt{6}) = \frac{\sqrt{6}(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2} = \frac{6\sqrt{3}-6}{2} = 3\sqrt{3}-3$

6.) Д.п. $QH \perp AC$, $QH \cap AC = H$

$QH = \rho(Q; AC)$

$(BC \perp QM, AC \perp BC) \Rightarrow QM \parallel AC$

$(QM \parallel AC, Q \in QM, M \in QM) \Rightarrow \rho(Q; AC) = \rho(M; AC)$

$\rho(M; AC) = MC = \frac{BC}{2} = 3$

$\rho(Q; AC) = \rho(M; AC) = QH = 3$

20

7.) $S(CQA) = \frac{1}{2} QH \cdot AC$

$S(CQA) = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3 = 3\sqrt{3}$.

8.) $S(COQ) = S(CQA) - S(COA) = 3\sqrt{3} - (3\sqrt{3} - 3) = 3$.

Ответ: $S(COQ) = 3$.

№1.

Пусть k – часть жидкости, которую отливали из первой пробирки. Тогда $(1-k)$ – часть жидкости, которая оставалась в пробирке.

Пусть концентрация – отношение объёма растворённого в-ва к объёму раствора.

Найдём, какая часть жидкого вещества (без воды) оставалась каждый раз после отливаний.

Ниже кол-во в-ва – не в молях, а как объём.

	I пробирка	II пробирка
Изначально	210 мл	210 мл
I отлив	$210(1-k)$ мл	$210(1-\frac{1}{9})$ мл
II отлив	$210(1-k)^2$ мл	$210(1-\frac{1}{9})^2$ мл
III отлив	$210(1-k)^3$ мл	

Тогда $210(1-k)$ мл – количество в-ва оставшегося в I пробирке после I отлива

$210(1-k)^2$ мл – кол-во в-ва оставшегося в I пробирке после II отлива

$210(1-k)^3$ мл – кол-во в-ва оставшегося во I пробирке после III отлива

$210\cdot(1-\frac{1}{9})$ мл – кол-во в-ва, оставшегося во II пробирке после I отлива

$210(1-\frac{1}{9})^2$ мл – кол-во в-ва, оставшегося во II пробирке после II отлива.

Т.к. каждый раз после отлива к р-ру доливали воды до прежнего объёма. Тогда ω_{k1} и ω_{k2} – концентрация первого и второго р-ра в конце, соответственно.

$$\omega_{k1} = \frac{V_{р\ в-ва}}{V_{р-ра}} = \frac{210(1-k)^3}{210}; \quad \omega_{k2} = \frac{V_{р\ в-ва}}{V_{р-ра}} = \frac{210(1-\frac{1}{9})^2}{210}$$

По условию $\frac{\omega_{k1}}{\omega_{k2}} = \frac{1}{9}$

$$\frac{210(1-k)^3}{210} : \frac{210(1-\frac{1}{9})^2}{210} = \frac{1}{9}$$

$$(1-k)^3 : \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$(1-k)^3 = \frac{8}{9^3}$$

$$1-k = \frac{2}{9}$$

$$k = \frac{7}{9}$$

Ответ: из первой пробирки каждый раз отливали $\frac{7}{9}$ смеси.

3

№ 2

$$A = \frac{3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{11} + 3^{12}}{3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-3} + \ldots + 3^{-11} + 3^{-12}}$$

$$A = \frac{3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{11} + 3^{12}}{\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{3^{12}}}$$

$$A = \frac{3(1 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{10} + 3^{11})}{\frac{3^{11} + 3^{10} + 3^9 + \ldots + 3^2 + 3^1 + 1}{3^{12}}}$$

$$A = \frac{3^{13}(1 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{10} + 3^{11})}{3^{11} + 3^{10} + 3^9 + \ldots + 3^2 + 3^1 + 1}$$

$\underline{A = 3^{13}}$ ✓

$A = 3^{13} = 3 \cdot 3^{12} = 3 \cdot (3^3)^4$

$3^3 = 27$

$27 \equiv 1 \pmod{13}$

$3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ ✓

т.к. НОД$(3; 13) = 1$, то $(3^4) \equiv 1^4 \pmod{13}$

$3^{12} \equiv 1 \pmod{13}$

Тогда если $k \equiv 1 \pmod{13}$, то $3k \equiv 3 \pmod{13}$

$k = 13m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$

$3k = 39m + 3$

$39m + 3 \equiv 3 \pmod{13}$

$3 \cdot 3^{12} \equiv 3 \pmod{13}$

12

$A \equiv 3 \pmod{13}$ ✓

Ответ: 3 - остаток от деления числа A на 13.

№ 5

$(x^2 - a)^2 + 2(x^2 - a) + (x - a) + 2 = 0$

$x^4 - 2ax^2 + a^2 + 2x^2 - 2a + x - a + 2 = 0$

$x^4 + 0 \cdot x^3 - 2x^2(a - 1) + x + a^2 - a + 2 = 0$

Уравнение должно иметь 2 различных решения, значит его можно представить либо как $(x - x_1)^2(x - x_2)^2 = 0$, либо как $(x - x_1)(x - x_2)(x^2 + bx + c) = 0$, где трехчлен $(x^2 + bx + c)$ не имеет корней. (x_1, x_2 - корни)

I $(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 = 0$

$(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2)^2 = 0$

$x^4 + x^2(x_1+x_2)^2 + x_1^2x_2^2 - 2x^3(x_1+x_2) + 2x^2 x_1x_2 - 2(x_1+x_2)x_1x_2x = 0$

$x^4 - 2x^3(x_1+x_2) + x^2((x_1+x_2)^2 + 2x_1x_2) - 2x(x_1+x_2)x_1x_2 + x_1^2x_2^2 = 0$

$2(x_1+x_2)=0$

$x_1=-x_2$

Тогда коэффициент при x тоже равен 0, но он равен 1. Получаем противоречие.

IV $(x-x_1)(x-x_2)(x^2+bx+c)=0$, $D=b^2-4c<0$

$(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)(x^2+bx+c)=0$

$x^4+bx^3+cx^2-x^3(x_1+x_2)-bx^2(x_1+x_2)-cx(x_1+x_2)+x_1x_2x^2+bx_1x_2x+cx_1x_2=0$

$x^4+x^3(b-(x_1+x_2))+x^2(c-b(x_1+x_2)+x_1x_2)+x(bx_1x_2-c(x_1+x_2))+cx_1x_2=0$

$$\begin{cases} b-(x_1+x_2)=0 \\ c-b(x_1+x_2)+x_1x_2=-2(a-1) \\ bx_1x_2-c(x_1+x_2)=1 \\ cx_1x_2=a^2-a+2 \end{cases}$$

?

$$\begin{cases} x_1+x_2=b \\ x_1x_2=\dfrac{1+bc}{b} \\ \dfrac{c(1+bc)}{b}=a^2-a+2 \\ c-b^2+\dfrac{1+bc}{b}=-2(a-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2-4c<0 \\ \dfrac{c}{b}+c^2=a^2-a+2 \\ c-b^2+\dfrac{1}{b}+c=-2(a-1) \end{cases}$$

Найдем, при каких a система разрешима, после найдем значения x при полученных a.

$$\begin{cases} b^2-4c<0 \\ c=\frac{1}{2}\left(b^2-\frac{1}{b}\right)-(a-1) \\ \dfrac{c}{b}+c^2=a^2-a+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2-4c<0 \\ c=\frac{1}{2}\left(b^2-\frac{1}{b}\right)-(a-1) \\ \left(\frac{1}{2}\left(b^2-\frac{1}{b}\right)-(a-1)\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\left(b^2-\frac{1}{b}\right)-(a-1)\right)=a^2-a+2 \end{cases}$$

$\left(\frac{1}{2}b^2-(a-1)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b}-(a-1)\right)=a^2-a+2$

$\left(\frac{1}{2}b^2-(a-1)\right)^2-\left(\frac{1}{2b}\right)^2=a^2-a+2$

$\frac{b^4}{4}-b^2(a-1)+(a-1)^2-\frac{1}{4b^2}=a^2-a+2 \quad |\cdot 4$

$b^4-4b^2(a-1)+4a^2-8a+4-\frac{1}{b^2}=4a^2-4a+8$

$b^4-4b^2(a-1)-\frac{1}{b^2}-4a-4=0$

$$\begin{cases} b\neq 0 \\ b^6-4b^4(a-1)-(4a+4)b^2-1=0 \end{cases}$$

?

$\varnothing$. Решение не продолжено!