

229227

Шифр

(заполняется ответственным
секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Малюков Дмитрий Николаевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Одинцово,

МАОУ Зареченская СОШ

Регистрационный номер 2216

Вариант задания 2-КМ

Дата проведения "29" февраля 20 20г.

Подпись участника

DM

56 (пятьдесят шесть) 

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

229227

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
9	6	16	-	5	20					56

Шифр _____

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 2-КМ

N1

$V_1 = 1 \text{ л}$

$V_2 = 10 \text{ л}$

$V_3 = 30 \text{ л}$

$N \leq 100$

$V_0 = 500 \text{ л}$

Кол-во = ?
каждого типа

Обозначим количества канистр первого, второго и третьего (V_1, V_2 и V_3) типа за x, y, z соответственно.

Тогда:

$$V_1 x + V_2 y + V_3 z = V_0 \Rightarrow x + 10y + 30z = 500;$$

$$x + y + z = N \leq 100$$

$$\begin{cases} x + 10y + 30z = 500 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

Также заметим, что $x, y, z \geq 0$, $x, y, z \leq N \Rightarrow$

$x, y, z \leq 100$; $x, y, z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (целому множеству)

Пусть $x = 10k$

$$\begin{cases} 10k + 10y + 30z = 500 \\ 10k + y + z = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10k + 10(100 - 10k - z) + 30z = 500 \\ y = 100 - 10k - z \end{cases}$$

$$k + 100 - 10k - z + 3z = 50$$

$$2z - 9k = -50$$

$$2z = 9k - 50 \quad | : 2$$

$$z = \frac{9k}{2} - 25$$

Т.к. $x \geq 0$; $x \leq 100$; $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то $k \geq 0$; $10k \leq 100 \Rightarrow$
 $\Rightarrow k \leq 10$; $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Способом подбора определим такое K , чтобы
 $z \geq 0; z \leq N'$; $y \geq 0; y \leq N'$. Т.к. в ^{сосудах} ~~выпущен~~ 3-го типа 30 л,
 то $z \leq \frac{N}{V_3} \Rightarrow z \leq \frac{100}{30}$

При $K < 6$, $z < 0$

Рассмотрим $K=6$

$$z = \frac{9 \cdot 6}{2} - 25 = 27 - 25 = 2$$

$$x = 10K = 10 \cdot 6 = 60$$

$$y = 100 - 60 - 2 = 38$$

Дальнейшее рассмотрение не уместно, т.к.

$z > \frac{100}{30}$, что противоречит заданному условию.

Ответ: 60 сосудов 1-ого типа;
 38 сосудов 2-ого типа;
 2 сосуда 3-его типа.

Есть еще решение!
 (9)

$$N2$$

$$\frac{x^2}{24} + \frac{40}{x} + \frac{96}{x^2} \geq \frac{5|x|}{6}$$

$$O.D.3: x \neq 0$$

$$\frac{x^2}{24} + \frac{96}{x^2} \geq \frac{5|x|}{6} - \frac{40}{x} \cdot 6$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{576}{x^2} \geq 5|x| - \frac{240}{x}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{576}{x^2} \geq 5(|x| - \frac{48}{x})$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{576}{x^2} \geq 10\left(\frac{|x|}{2} - \frac{24}{x}\right)$$

$$1) x > 0$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{576}{x^2} \geq 10\left(\frac{x}{2} - \frac{24}{x}\right)$$

Пусть $\frac{x}{2} - \frac{24}{x} = t$, тогда $t^2 = \frac{x^2}{4} - 24 + \frac{576}{x^2} \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{576}{x^2} = t^2 + 24$$

$$t^2 + 24 \geq 10t$$

$$t^2 - 10t + 24 \geq 0$$

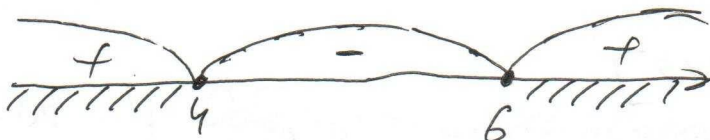
$$y = t^2 - 10t + 24$$

$$y = 0$$

$$t^2 - 10t + 24 = 0$$

$$\Delta = 100 - 4 \cdot 24 = 100 - 96 = 4$$

$$t_1 = \frac{10-2}{2} = 4 \quad t_2 = \frac{10+2}{2} = 6$$



$$t \leq 4$$

$$t \geq 6$$

$$I) t \leq 4$$

$$\frac{x}{2} - \frac{24}{x} \leq 4 \quad | \cdot 2x$$

$$x^2 - 48 \leq 8x$$

$$x^2 - 8x - 48 \leq 0; y = x^2 - 8x - 48$$

$$\Delta = 64 + 4 \cdot 48 = 64 + 192 = 256$$

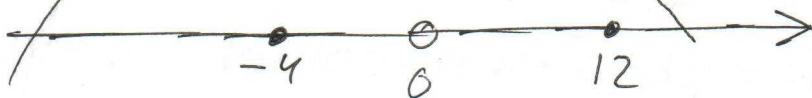
$$y = 0$$

$$x^2 - 8x - 48 = 0$$

$$\Delta = 64 + 4 \cdot 48 = 64 + 192 = 256$$

$$x_1 = \frac{8-16}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{8+16}{2} = 12$$



$$\frac{x}{2} - \frac{24}{x} \leq 4 \quad | \cdot 2$$

$$x \frac{x}{x} - \frac{48}{x} - 8 \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 48 - 8x}{x} \leq 0$$

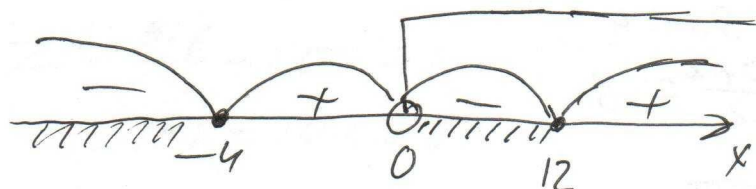
$$\frac{(x+4)(x-12)}{x} \leq 0$$

$$y = \frac{(x+4)(x-12)}{x}$$

$$y=0$$

$$x=-4 \quad x \neq 0$$

$$x=12$$



Т.к $x > 0$, то $x \in (0; 12]$

$$\text{II) } t \geq 6$$

$$\frac{x}{2} - \frac{24}{x} \geq 6$$

$$\frac{x}{2} - \frac{24}{x} - 6 \geq 0 \quad | \cdot 2$$

$$x - \frac{48}{x} - 12 \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 12x - 48}{x} \geq 0$$

$$x^2 - 12x - 48 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 48 = 144 + 192 = 336$$

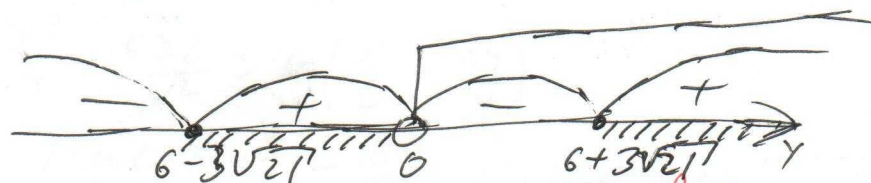
$$\sqrt{D} = 6\sqrt{21}$$

$$x_1 = \frac{12 - 6\sqrt{21}}{2} = 6 - 3\sqrt{21} \quad x_2 = 6 + 3\sqrt{21}$$

$$\frac{(x - 6 + 3\sqrt{21})(x - 6 - 3\sqrt{21})}{x} \geq 0$$

$$x = 6 + 3\sqrt{21} \quad x \neq 0$$

$$x = 6 - 3\sqrt{21}$$



Т.к $x > 0 \Rightarrow x \in [6 + 3\sqrt{21}; +\infty)$

229227

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего

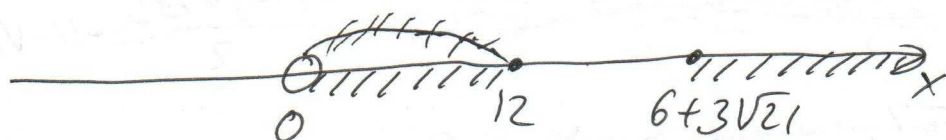
Шифр

заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

Вариант № 2-КМ

№2 (продолжение).

Объединим результаты I и II



$$x \in (0; 12] \cup [6+3\sqrt{21}; +\infty)$$

2) $x < 0$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{546}{x^2} \geq 10\left(-\frac{x}{2} - \frac{24}{x}\right)$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{546}{x^2} \geq -10\left(\frac{x}{2} + \frac{24}{x}\right)$$

Пусть $\frac{x}{2} + \frac{24}{x} = t$, тогда $t^2 = \frac{x^2}{4} + 24 + \frac{546}{x^2} \Rightarrow$

$$t^2 - 24 = \frac{x^2}{4} + \frac{546}{x^2}$$

$$t^2 - 24 \geq -10t$$

$$t^2 + 10t - 24 \geq 0$$

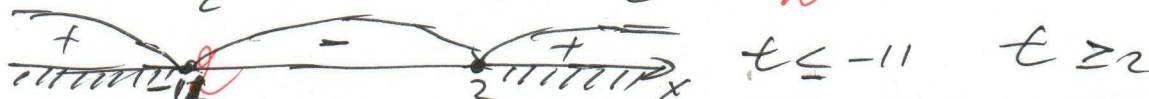
$$y = t^2 + 10t - 24$$

$$y = 0$$

$$t^2 + 10t - 24 = 0$$

$$D = 100 + 4 \cdot 24 = 100 + 96 = 196$$

$$t_1 = \frac{-10+14}{2} = 2 \quad t_2 = \frac{-10-14}{2} = -12$$



$$I) \frac{x}{2} + \frac{24}{x} \leq -11 \quad | \cdot 2$$

$$x + \frac{48}{x} + 22 \leq 0$$

$$\frac{x^2 + 48 + 22x}{x} \leq 0$$

$$x^2 + 48 + 22x = 0$$

~~$$D = 48^2 - 4 \cdot 22 = 48^2 - 88 = 2304 - 88 = 2216$$~~

~~$$\begin{array}{r} 36 \\ 48 \\ \times 48 \\ \hline 384 \\ 192 \\ \hline 2304 \end{array}$$~~

~~$$\sqrt{D} = \sqrt{2216} = 2\sqrt{554}$$~~

~~$$D = 484 - 192 = 292$$~~

~~$$\sqrt{D} = \sqrt{292} = 2\sqrt{73}$$~~

~~$$x_1 = \frac{-48 + 2\sqrt{554}}{2} = -24 + \sqrt{554} = \frac{-22 + 2\sqrt{73}}{2} = -11 + \sqrt{73}$$~~

~~$$x_2 = \frac{-48 - 2\sqrt{554}}{2} = -24 - \sqrt{554} = \frac{-22 - 2\sqrt{73}}{2} = -11 - \sqrt{73}$$~~

~~$$T.K. \sqrt{554} < 24 \Rightarrow x_1 < 0$$~~

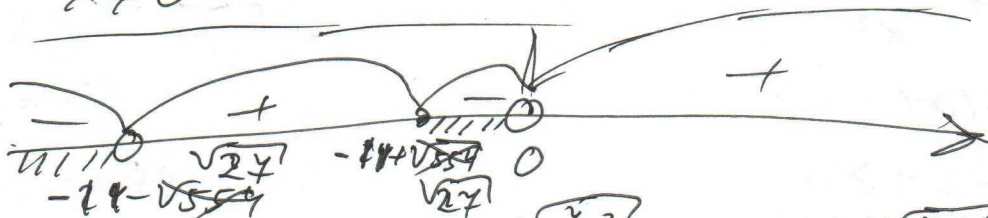
~~$$\frac{(x + 11 - \sqrt{73})(x + 11 + \sqrt{73})}{x} \leq 0$$~~

~~$$x = \frac{-11 + \sqrt{73}}{-24 + \sqrt{554}}$$~~

~~$$x = \frac{-11 - \sqrt{73}}{-24 - \sqrt{554}}$$~~

~~$$(x < 0) \quad T.K. \sqrt{73} < \sqrt{81} < 9$$~~

~~$$x \neq 0$$~~



~~$$x \in (-\infty; -11 - \sqrt{73}) \cup [-11 + \sqrt{73}; 0)$$~~

$$\text{II)} \frac{x}{2} + \frac{24}{x} \geq 2 \quad | \cdot 2$$

$$x + \frac{48}{x} - 4 \geq 0$$

$$\frac{x^2 + 48 - 4x}{x} \geq 0$$

$$x^2 - 4x + 48 = 0$$

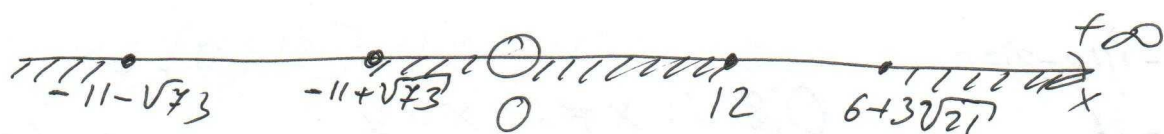
$$D = 16 - 4 \cdot 48$$

$$D < 0$$

Корней нет

$$x \in \emptyset$$

Общее решение неравенства:



$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -11-\sqrt{73}] \cup [-11+\sqrt{73}; 0) \cup [0; 12] \cup [6+3\sqrt{21}; +\infty)$$

N3

6

Воспользуемся алгоритмом Евклида:

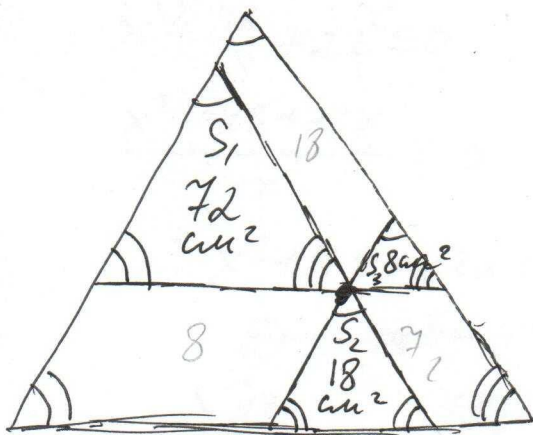
$$\begin{aligned} \text{НОД}(7a+66; 3a+76) &= \text{НОД}(7a+66; a+6) = \\ &= \text{НОД}(6a+56; a+6) = \text{НОД}(5a+46; a+6) = \dots = \\ &\text{будет вычитаться} \\ &= \text{НОД}(a; a+6) = \text{НОД}(a; 6) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\text{НОД}(7a+66; 3a+76) = \text{НОД}(a; 6) = d \text{ (из условия)}$$

Ответ: d

16

N6



Заметим, что все треугольники
которые были заданы — подобны
их соответствующие элемен-
ты пропорциональны \Rightarrow
и их площади будут пропор-
циональны, тогда:

$$\cancel{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2}$$

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = \sqrt{S} \Rightarrow$$

$$\sqrt{S}$$

$$S = (\sqrt{72} + \sqrt{18} + \sqrt{8})^2 = (\sqrt{36 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{4 \cdot 2})^2 =$$

$$= (6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2})^2 = (11\sqrt{2})^2 = 121 \cdot 2 = 242 \text{ cm}^2$$

Ответ: 242 cm^2 .

20

N5

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{2} - \frac{1x-2}{x-2} - 1\right)(y-2) = 0 \\ y = a + \frac{1x-2}{(x-2)(x-y)^2} \end{cases}$$

$$O \neq 3: x \neq 2; x \neq y$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{2} - 1 - 1\right)(y-2) = 0 \\ y = a + \frac{1}{(x-y)^2} \\ x > 2 \\ \frac{y}{2}(y-2) = 0 \\ y = a - \frac{1}{(x-y)^2} \\ x < 2 \end{cases}$$

$$1) \left(\frac{y}{2} - 2\right)(y-2) = 0$$

$$y = 4 \text{ или } y = 2$$

$$1) y = 4$$

$$4 = a + \frac{1}{(x-4)^2}$$

$$\text{Пусть } (x-4)^2 = t$$

$$4 = a + \frac{1}{t^2} \Rightarrow \frac{at^2 - 4t^2 + 1}{t^2} = 0$$

При $y=4$ корня нет

?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего

Шифр

229227

заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

Вариант № 2-КМ

№5 (продолжение)

2) $y=2$

$$2 = a + \frac{1}{(x-2)^2}$$

Пусть $(x-2)^2 = k^2$; $(x-2) = k$

$$2 = a + \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{ak^2 + 1 - 2k^2}{k^2} = 0 \Rightarrow$$

$$ak^2 + 1 - 2k^2 = 0$$

$$k^2(a-2) = -1$$

$$(x-2)^2(a-2) - 1 = 0$$

$$(x-2)^2(a-2) = 1$$

$$(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow a-2 \geq 0$$

$$a \geq 2$$

$$x = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{a-2}}$$

$$(x > 2)$$

Вернёмся к 1)

$$4 = a + \frac{1}{t^2}$$

$$\frac{4t^2}{t^2} = \frac{at^2}{t^2} + \frac{1}{t^2}$$

$$\frac{4t^2}{t^2} - \frac{at^2}{t^2} + \frac{1}{t^2} = 0 \Rightarrow$$

$$4t^2 - at^2 + 1 = 0$$

$$t^2(a-4) = -1$$

$$a-4 < 0$$

$$a < 4$$

$$x = 4 \pm \frac{1}{\sqrt{a-4}}$$

$$(x > 2)$$

$$x > 4$$

Теперь мы знаем, что $a \geq 2$. $a \leq 4$

2) $\frac{y}{2} (y-2) = 0$

$$y=0 \quad y=2.$$

$$y' = a - \frac{1}{t^2}.$$

$$\frac{2t^2}{t^2} = \frac{at^2}{t^2} - \frac{1}{t^2}$$

$$\frac{at^2}{t^2} - \frac{2t^2}{t^2} - \frac{1}{t^2} = 0$$

$$\frac{at^2 - 2t^2 - 1}{t^2} = 0$$

$$t^2(a-2) = 1$$

$$a-2 \geq 1.$$

2) $y=0$

$$a = a + t^2$$

$$a \geq 0$$

Ответ: $a \in [2; 4]$

5