Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»

МАТЕМАТИКА (заключительный этап)

2018-2019 учебный год

9 класс

Типовой вариант

1. ***(15 баллов)*** 48 друзей шли мимо булочной. Часть из них зашла внутрь, чтобы купить по пирожку. Оказалось, что стоимость одного пирожка меньше на 2,7 рубля, чем количество ребят оставшихся на улице. Известно, что за покупку всех пирожков была заплачена наибольшая из возможных сумма денег. Определите эту сумму. Сколько пирожков было куплено?

2. ***(15 баллов)*** Четыре числа составляют геометрическую прогрессию. Первые три являются длинами сторон первого треугольника, последние три - длинами сторон второго треугольника. Докажите, что эти треугольники подобны и найдите промежуток изменения коэффициента подобия. В ответе укажите сумму возможных целых значений коэффициента подобия.

3. (15 баллов) Решите неравенство:

$$\frac{2|3x-1|+6}{5}+\frac{10}{3+|3x-1|} \leq 4-\sqrt{81x^4-18x^2+1}$$

4. ***(15 баллов)*** Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$(x^2+(a+1)x+a)\cdot(x^2-ax+2)=0$ имеет три различных корня.

5. ***(20 баллов)*** В остроугольном треугольнике *ABC* на стороне *BC* выбирается точка *D* так, что *CD:DB =1:2*, а на отрезке *AD* – точка *K*, при этом *AK*+*AD* = *DB*. Через точку *K* и вершину *B* проводится прямая, которая пересекает сторону *AC* в точке *E*. Треугольник *AEK* – равнобедренный *(AE=EK)*. Найдите величину угла *ADB* в градусах.

6. ***(20 баллов)*** Каждая из двух корзин содержит белые и черные шары, причем общее число шаров в обеих корзинах равно 20. Из каждой корзины наугад вынимают по одному шару. Известно, что вероятность того, что оба вынутых шара окажутся белыми, равна 0,54. Найти вероятность того, что оба вынутых шара окажутся черными.

Решение типового варианта.

№1. (15 баллов) 48 друзей шли мимо булочной. Часть из них зашла внутрь, чтобы купить по пирожку. Оказалось, что стоимость одного пирожка меньше на 2,7 рубля, чем количество ребят оставшихся на улице. Известно, что за покупку всех пирожков была заплачена наибольшая из возможных сумма денег. Определите эту сумму. Сколько пирожков было куплено?

Решение. Пусть x - количество ребят оставшихсяна улице, тогда купили (48-x) -пирожков, (x-2,7) – стоимость одного пирожка.

(48-x) (x-2,7) -стоимость всех пирожков.

$y=(48-x)(x-2,7)$

$x_в= 25,35$.

$x_1= 25$, $y_1= (48-25)(25-2,7) =23*22,3= 512,9$.Наибольшее количество 23 штуки.

$x_2=26$, $y_2= (48-26)(26-2,7) =22*23,3= 512,6$.

<u>Ответ</u>. **а) наибольшая сумма денег 512,9 рублей;**

б) купили 23 пирожка.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка .
5	Решено подбором значений переменной, удовлетворяющих условию задачи.
2	Наблюдаются отдельные догадки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

№2. (15 баллов) Четыре числа составляют геометрическую прогрессию. Первые три являются длинами сторон первого треугольника, последние три - длинами сторон второго треугольника. Докажите, что эти треугольники подобны и найдите промежуток изменения коэффициента подобия. В ответе укажите сумму возможных целых значений коэффициента подобия.

Решение.

Пусть длины сторон треугольников будут $a,\ ak,\ ak^2$ и $ak,\ ak^2,\ ak^3$. Поскольку

$\frac{ak}{q}=\frac{ak^2}{ak}=\frac{ak^3}{ak^2}$, то треугольники подобны с коэффициентом k. Достаточно записать условия существования треугольника (неравенство треугольника) только для одного из подобных треугольников $\begin{cases} k^2+1>k \\ 1+k>k^2 \\ k^2+k>1 \end{cases}$. Решая систему этих условий, получаем, что $k \in \left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)$. Из целых чисел только единица лежит в указанном промежутке, поэтому в ответ идет 1.

Ответ:1

15 б	Полное обоснованное решение
10 б	Есть арифметическая ошибка при решении системы условий.
5 б	Доказано подобие тругольников. Выписаны не все условия существования треугольников или присутствует перебор целых значений коэффициента подобия.

№3. (15 баллов) Решите неравенство:

$$\frac{2|3x-1|+6}{5}+\frac{10}{3+|3x-1|}\le 4-\sqrt{81x^4-18x^2+1}$$

Решение:

ОДЗ неравенства есть все действительные числа. Переписав левую часть неравенства в виде $2\left(\frac{|3x-1|+3}{5}+\frac{5}{|3x-1|+3}\right)$, замечаем, что она не меньше 4, как удвоенная двух взаимно обратных положительных величин, и только при $3+|3x-1|=5$ она равна 4.

В то же время правая часть неравенства

$$4-\sqrt{81x^4-18x^2+1}=4-\sqrt{(9x^2-1)^2}=4-|9x^2-1|\le 4$$

Следовательно, неравенство равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} 3+|3x-1|=5 \\ 4-|9x^2-1|=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3x-1|=2 \\ |9x^2-1|=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3};\ 1 \\ x=\pm\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$$

Ответ: $x = -\ \dfrac{1}{3}$.

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки
10	Верно выполнены оценки обеих частей неравенства и/или задача сведена к равносильной системе уравнений
5	Верно выполнена оценка одной части неравенства
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№4. (15 баллов) Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(x^2+(a+1)x+a)\cdot(x^2-ax+2)=0$ имеет три различных корня.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x^2+(a+1)x+a=0 \\ x^2-ax+2=0 \end{array}\right.$ и может иметь от нуля до четырёх корней. Оно имеет три различных корня, если одно из уравнений совокупности имеет два различных корня (D>0), а другое один (D=0) и этот корень не совпадает ни с одним из корней другого уравнения; или если оба уравнения имеют по два различных корня, но один из корней первого уравнения совпадает с одним из корней второго уравнения. Исследуем эти возможные варианты.

Обозначим D_1, D_2 дискриминанты первого и второго уравнений. $D_1=(a+1)^2-4a=a^2+2a+1-4a=(a-1)^2$. Первое уравнение всегда имеет решения: при $a=1$ - один корень, при остальных a - два различных корня $x_{1,2}=\dfrac{-a-1\pm(a-1)}{2}=\left[\begin{array}{l} -1 \\ -a \end{array}\right.$. $D_2=a^2-8$. При $a\in(-2\sqrt{2};2\sqrt{2})$ второе уравнение не имеет корней. $1\in(-2\sqrt{2};2\sqrt{2})$, поэтому при $a=1$ всё уравнение имеет только один корень, а не три. Это значение параметра нам не подходит. При $a = \pm 2\sqrt{2}$ второе уравнение имеет единственное решение и если при этом не будет сдваивания корней, то уравнение будет иметь три различных корня. При $a \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$ второе уравнение имеет два различных корня.

Исследуем теперь вопрос совпадения корней. Можно решать соответствующие иррациональные уравнения. Рассмотрим другой метод. Если число x_0 является одновременно корнем двух различных уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$, то x_0 является одновременно и корнем уравнения

$k_1 f(x) + k_2 g(x) = 0$ при любых k_1 и k_2. Будем подбирать такие значения коэффициентов, чтобы сначала сократились слагаемые, содержащие x^2, а затем свободные члены уравнений.

Вычтем из одного уравнения другое $(k_1 = 1; k_2 = -1)$, получим $x^2 + (a+1)x + a - x^2 + ax - 2 = 0$; $(2a+1)x + a - 2 = 0$ (1). Теперь возьмём $k_1 = 2; k_2 = -a$, получим $2x^2 + 2(a+1)x + 2a - ax^2 + a^2 x - 2a = 0$; $x^2(2-a) + x(2a + 2 + a^2) = 0$; Так как ноль не является общим корнем уравнений, можно сократить его на x. Получим $x(2-a) + 2a + 2 + a^2 = 0$ (2).

Уравнения (1) и (2) имеют общий корень, если выполняется условие $-(a-2)^2 = (2a+1)\cdot(a^2 + 2a + 2)$; $2a^3 + 6a^2 + 2a + 6 = 0$. Уравнение имеет только один действительный корень $a = -3$.

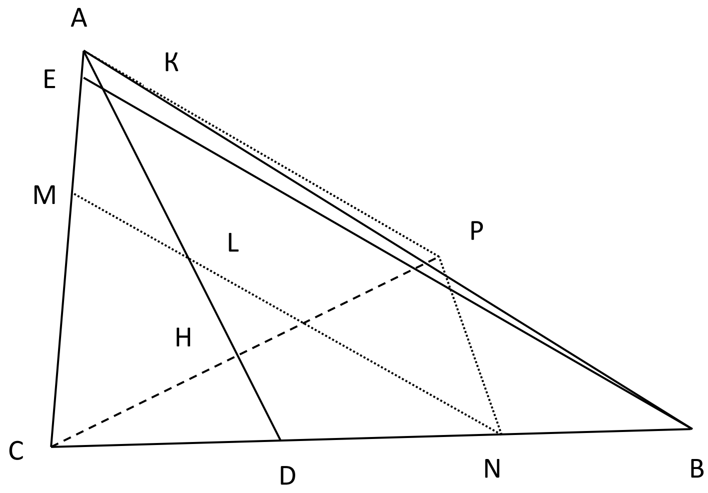
Ответ: -3 ; $\pm 2\sqrt{2}$

15 баллов	Полное обоснованное решение
10 баллов	Ход решения верен, все его этапы присутствуют, но из-за арифметической ошибки или невнимательности ответ отличается от правильного одним значением. Или при правильном ответе обоснования недостаточны
5 баллов	Правильно найдены только значения параметра, при которых равен нулю дискриминант одного из уравнений. Возможность совпадения корней двух квадратных трёхчленов не учитывается.

№5. (20 баллов) В остроугольном треугольнике ABC на стороне BC выбирается точка D так, что CD:DB =1:2, а на отрезке AD – точка K, при этом AK+AD = DB. Через точку K и вершину B проводится прямая, которая пересекает сторону AC в точке E. Треугольник AEK – равнобедренный (AE=EK). Найдите величину угла ADB в градусах.

Решение. Отметим на CB точку N так, чтобы BN = ND. Проведем NM||BE. NM пересекает AD в точке L. Проведем отрезок CH⊥AD. Продолжим его до P так, что HP = HC=>PN||AD.

В треугольнике DEB отрезок NL – средняя линия, следовательно, DL = LK; AL= AD–LD = DB–AK–KL = DB–AL; AL = CD = DN.



Треугольник CAP – равнобедренный (AH – медиана и высота) поэтому $\angle PAD = \angle DAC$, но $\angle DAC = \angle AKE$ (по условию), $\angle AKE = \angle ALM$ (соответственные), $\angle ALM = \angle NLD$ (вертикальные), $\angle NLD = \angle NLP$ (накрест лежащие), следовательно, LN||AP, поэтому ALNP - параллелограмм.

В прямоугольном треугольнике CPN длина CN=2PN, т.е. $\angle PCN = 30^0$. Итак, $\angle ADB = 120^0$.

Ответ: 120^0.

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
7	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.

0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№6. (20 баллов)**.** Каждая из двух корзин содержит белые и черные шары, причем общее число шаров в обеих корзинах равно 20. Из каждой корзины наугад вынимают по одному шару. Известно, что вероятность того, что оба вынутых шара окажутся белыми, равна 0,54. Найти вероятность того, что оба вынутых шара окажутся черными.

Ответ: 0,04.

Решение. Пусть в i -ой корзине n_i шаров, среди которых k_i белых, $i=1,2$.

Тогда $\frac{k_1}{n_1}\cdot\frac{k_2}{n_2}=0,54=\frac{27}{50}$. Поэтому для некоторого натурального m справедливы равенства $k_1\cdot k_2=27m$, $n_1\cdot n_2=50m$. Одно из чисел n_i делится на 5, тогда и второе из них тоже делится на 5 (так как $n_1+n_2=20$).

Пусть $n_1\le n_2$. Возможны два случая:

1) $n_1=5$, $n_2=15$. Тогда m не является натуральным и этот случай не удовлетворяет условию задачи.

2) $n_1=10$, $n_2=10$. Тогда $m=2$, $k_1\cdot k_2=54$, причем $k_1\le 10$, $k_2\le 10$, так что $k_1=9, k_2=6$ ($k_2=9, k_1=6$).

Таким образом, в любом случае вероятность вынуть два черных шара равна

$$\left(1-\frac{k_1}{n_1}\right)\cdot\left(1-\frac{k_2}{n_2}\right)=\left(1-\frac{9}{10}\right)\cdot\left(1-\frac{6}{10}\right)=0,04.$$

Ответ: 0,04.

Баллы	**Критерии выставления**
20	Обоснованно получен правильный ответ.
10	В решении рассмотрены не все возможные из случаев распределения шаров по корзинамили нет обоснования того, что все возможные случаи рассмотрены.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий.