

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»
МАТЕМАТИКА (заключительный этап)
2018-2019 учебный год
8 класс

Типовой вариант

1. **(15 баллов)** Каково расстояние между точками c и d на числовой оси, если про них известно, что $c + d = \sqrt{2020}$ и $cd = 198,75$.
2. **(15 баллов)** Найдите значения переменных x и y , при которых выполняется равенство:
$$\left(\frac{y^2 + 2y + 8x - 35}{4x^2 - 16x} - 1\right)^2 + (y + 6x - x^2 - 5)^2 = 0.$$
3. **(15 баллов)** Площадь квадрата $ABCD$ равна 100. Точки K и L середины сторон AD и CD соответственно. Отрезки BK и AL пересекаются в точке M . Найти площадь четырехугольника $BMLC$.
4. **(15 баллов)** При каких значениях параметра a уравнение $f(x) = p(x)$, где $f(x) = \left| \frac{x^2 - 4x + 4}{2 - x} + \frac{3x^2 - 4x}{x} \right|$, $p(x) = |x + a|$ имеет одно решение?
5. **(20 баллов)** В параллелограмме $ABCD$ M – середина стороны BC , N – середина стороны CD . Известно, что $DM \perp AC$. Найдите отрезок CD , если сторона $BN = 12$.
6. **(20 баллов)** Известно, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.
 $34! = 295232799CD96041408476186096435AB000000$
Найти A, B, C, D .

Решение типового варианта

1. Согласно теореме обратной теореме Виета составим квадратное уравнение.

$$\text{Получим } x^2 - \sqrt{2020}x + 198,75 = 0.$$

$$\text{Далее, решая его, найдём корни } c \text{ и } d \quad c = \frac{\sqrt{2020}}{2} + \frac{35}{2} \text{ и } d = \frac{\sqrt{2020}}{2} - \frac{35}{2}, \text{ а,}$$

следовательно, расстояние между точками c и d $c - d = 35$

Ответ: 35.

Баллы	Критерии
15 баллов	Обоснованно получен верный ответ
10 баллов	Квадратное уравнение решено, но при этом допущена арифметическая ошибка или не найдено расстояние между точками
5 баллов	Правильно по условию задачи составлено квадратное уравнение.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

2. Данное уравнение эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y^2 + 2y + 8x - 35}{4x^2 - 16x} - 1 = 0 \\ y + 6x - x^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2 + 2y - 35 - 4x^2 + 24x}{4x(x - 4)} = 0 \\ y = x^2 - 6x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 2y + 1 - 4x^2 + 24x - 36 = 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq 4 \\ y = x^2 - 6x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y + 1)^2 - (2x - 6)^2 = 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq 4 \\ y = x^2 - 6x + 5 \end{cases}.$$

Преобразуем первое уравнение: $(y + 1 - 2x + 6) \cdot (y + 1 + 2x - 6) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = 5 - 2x \end{cases}.$$

$$\text{Система преобразуется к виду: } \left\{ \begin{aligned} &\begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x - 7 = x^2 - 6x + 5 \end{cases} \\ &\begin{cases} y = 5 - 2x \\ 5 - 2x = x^2 - 6x + 5 \end{cases} \\ &x \neq 0 \\ &x \neq 4 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} &\begin{cases} y = 2x - 7 \\ x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} y = 5 - 2x \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \\ &x \neq 0 \\ &x \neq 4 \end{aligned} \right\}.$$

Данной системе удовлетворяют две пары: $(2; -3), (6; 5)$.

Ответ: $\{(2; -3), (6; 5)\}$.

Баллы	Условия выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	Полностью решены все системы, но из ответа не исключено решение, не входящее в ОДЗ.
8	Первое уравнение верно преобразовано в два линейных уравнения, получены две системы, одна из которых решена верно (включая ОДЗ), а вторая – неверно из-за арифметической или алгебраической ошибки.
5	Первое уравнение верно преобразовано в два линейных уравнения, далее ни одна из двух получившихся систем не была доведена до верного ответа.
0	Решение не удовлетворяет ни одному из вышеперечисленных условий

3. $\triangle ABK = \triangle DAL$ по 2-м катетам, следовательно $BK \perp AL$. По теореме Пифагора $BK = 5\sqrt{5}$. $\cos \angle ABK = \frac{AB}{BK} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. С другой стороны, в $\triangle ABM$ $BM = AB \cdot \cos \angle ABK = 4\sqrt{5}$. Значит, $BM:MK = 4:1$. Тогда $\frac{S_{ABK}}{S_{ABM}} = \frac{BK}{MB} = \frac{5}{4}$.

Следовательно,

$$S_{BMLC} = S_{ABCL} - S_{ABM} = (10 + 5) \cdot 5 - \frac{4}{5} \cdot 25 = 55.$$

Ответ: 55.

15 баллов	Верное обоснованное решение
12 баллов	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка.
10 баллов	Верно найдено отношение отрезков BM и MK.
5 баллов	Доказана перпендикулярность BK и AL
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

4. Преобразуем выражение $\left| \frac{x^2 - 4x + 4}{2 - x} + \frac{3x^2 - 4x}{x} \right| = \left| \frac{(2 - x)^2}{2 - x} + \frac{x(x - 4)}{x} \right| = |2x - 2|$,
получим $f(x) = |2x - 2|$, $D(f): x \neq 2, x \neq 0$.

Решим уравнение $|2x - 2| = |x + a|$ графически в системе xOa

$$(2x - 2)^2 = (x + a)^2$$

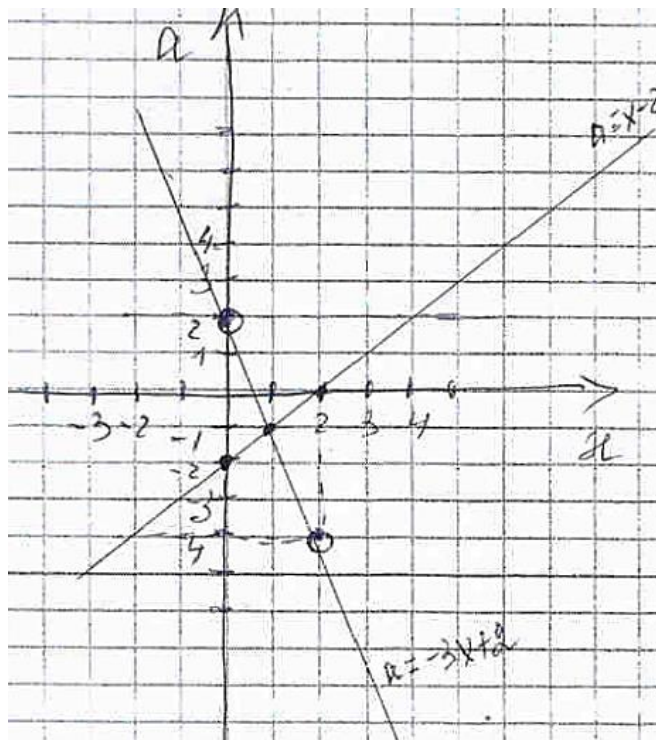
$$(2x - 2 + x + a)(2x - 2 - x - a) = 0$$

$$\begin{cases} 3x - 2 + a = 0 \\ x - 2 - a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -3x + 2 \\ a = x - 2 \end{cases}$$

Уравнение $f(x) = p(x)$ имеет ровно одно решение, если $a = -4$; $a = -1$; $a = 2$.

Ответ: $a = -4$; $a = -1$; $a = 2$.



15 баллов	Верное обоснованное решение
12 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при его аналитическом решении допущена вычислительная ошибка, не связанная с областью определения функции.
10 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение, но оно не решено или решено неверно.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

5. Проведем диагонали параллелограмма AC и BD. Пусть они пересекаются в точке O. Тогда CO, BN, DM – медианы треугольника BCD. Пусть они пересекаются в точке K. По свойству медиан BK:KN=2:1. Так как $DM \perp AC$, то треугольник SKD - прямоугольный. KN его медиана, проведенная к гипотенузе. Значит, $KN = 1/2 CD$. Тогда $BN:CD = 3:2$. Значит, $CD = 2/3 BN = 8$.

Ответ: 8.

20	Обоснованно получен верный ответ
15	Решение верно, но допущена вычислительная ошибка.
10	Рассмотрен треугольник BCD и медианы в нем, прямоугольный треугольник, указано свойство медианы, но сторона CD через BN выражена неверно.
5	Рассмотрен треугольник BCD и медианы в нем, дальнейшее решение отсутствует или неверное.

0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
---	---

6. В выражении содержатся следующие произведения:

$(2 \cdot 5) \cdot (10) \cdot (12 \cdot 15) \cdot (25 \cdot 4) \cdot (20 \cdot 30) \cdot (35 \cdot 14) \dots \Rightarrow$ т.к. каждое из этих сгруппированных произведений заканчивается на 0, то число будет заканчиваться на 8 нулей $\Rightarrow V=0$

Разобьём выражение на следующие произведения:

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = \dots 8$ произведение оканчивается на 8 (без нулей)

$11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 = \dots 4$ произведение оканчивается на 4 (без нулей)

$21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 = \dots 4$ произведение оканчивается на 4 (без нулей)

$31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 = \dots 4$ произведение оканчивается на 4 (без нулей)

$8 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = \dots 2$ произведение оканчивается на 2 $\Rightarrow A=2$

Рассмотрим признаки делимости числа на 11 и на 9:

Сумма цифр на четных позициях:

$$9+2+2+9+C+9+0+1+0+4+6+8+0+6+3+2=61+C$$

Сумма цифр на нечетных позициях:

$$2+5+3+7+9+D+6+4+4+2+8+7+1+3+6+9+4+5=80+C$$

По признаку делимости на 11:

$$80+D-61-C : 11, 19-C+D : 11$$

Отсюда $D-C=3$ или $D-C=-8$.

По признаку делимости на 9:

$$80+D+C+61 : 9, 141+D+C : 9$$

Отсюда $D+C=3$ или $D+C=12$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} D - C = 3 \\ C + D = 3 \end{cases} \Rightarrow 2D=6 \Rightarrow D=3 \Rightarrow C=0$$

Примечание: если рассматривать остальные случаи, то C либо дробное, либо больше 10, из чего следует, что данное решение является единственным.

Ответ: A=2, V=0, C=0, D=3.

20 баллов	Обоснованно получен верный ответ
15 баллов	Верно найдены три цифры из четырех.
10 баллов	Верно найдены две цифры из четырех.
5 баллов	Верно найдена одна цифра из четырех.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше