Заключительный этап академического соревнования Олимпиады школьников

«Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика»

Типовой вариант задания для 11 класса

1. Имеется 5 кусков прозрачного стекла одинаковой квадратной формы и одинакового размера. Каждое стекло своими диагоналями условно разделено на 4 одинаковые части (прямоугольные треугольники), и один из этих треугольников закрашен непрозрачной краской своего индивидуального цвета, отличного от цветов закраски других стекол. Затем все эти стекла укладываются друг на друга в стопку (с точным выравниванием границ и вершин) закрашенными частями вверх. Сколько существует различных способов укладки стекол в стопку так, чтобы вся она в итоге оказалась полностью непрозрачной в вертикальном направлении. (12 баллов)

2. Решите уравнение $\sin^4(2025x)+\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)=1$. (12 баллов)

3. Все члены бесконечной геометрической прогрессии являются натуральными числами. Сумма третьего, пятого и седьмого членов этой прогрессии равна $819\cdot 6^{2016}$. Найдите знаменатель прогрессии. (16 баллов)

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что площадь треугольника ADE равна $0,5$. Вписанная в четырехугольник $BDEC$ окружность касается стороны AB в точке K, причем $AK=3$. Найдите тангенс угла BAC, если около четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность, и $BC=15$. (20 баллов)

5. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}\log_{|x+3|}(ax+4a)=2\log_{|x+3|}(x+y),\\ x+1+\sqrt{x^2+2x+y-4}=0\end{cases}$$ имеет два различных решения, и найдите эти решения при каждом a. (20 баллов)

6. Найдите объемы частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходящая через вершину C и центр симметрии боковой грани AA_1B_1B, если площадь сечения призмы этой плоскостью равна 21, а сторона основания призмы равна $2\sqrt{14}$. (20 баллов)

Решения типового варианта заключительного тура (11 класс)

1. Имеется 5 кусков прозрачного стекла одинаковой квадратной формы и одинакового размера. Каждое стекло своими диагоналями условно разделено на 4 одинаковые части (прямоугольные треугольники), и один из этих треугольников закрашен непрозрачной краской своего индивидуального цвета, отличного от цветов закраски других стекол. Затем все эти стекла укладываются друг на друга в стопку (с точным выравниванием границ и вершин) закрашенными частями вверх. Сколько существует различных способов укладки стекол в стопку так, чтобы вся она в итоге оказалась полностью непрозрачной в вертикальном направлении. (12 баллов)

Решение. Сначала рассмотрим некоторый один фиксированный вертикальный порядок укладки стекол (снизу вверх). Ясно, что, повернув всю укладку целиком на какой-то угол, мы укладку не изменим (не получим новой укладки). Поэтому можно считать, что нижнее стекло укладки всегда зафиксировано (не поворачивается). Тогда укладки (с фиксированным вертикальным порядком стекол) будут отличаться друг от друга поворотом на $0°$, $90°$, $180°$, и $270°$ каждого из последующих 4-х верхних стекол по отношению к фиксированному нижнему стеклу. Поэтому получим всего $4^4 = 256$ вариантов укладки с фиксированным вертикальным порядком стекол. Добавив теперь всевозможные вертикальные перестановки пяти стекол (5! = 120 вариантов), получим общее количество возможных укладок стекол в стопку: $5!\cdot 4^4 = 120 \cdot 256 = 30720$ штук. Но не все эти укладки удовлетворяют условию задачи. Условию задачи удовлетворяют только те укладки, при которых вся стопка оказывается вертикально непрозрачной. Рассмотрим столбики из треугольников, находящихся над каждым из четырех фиксированных треугольников нижнего стекла. Условие задачи будет выполнено тогда, когда каждый из этих четырех столбиков является непрозрачным. При этом один из этих столбиков уже заведомо не прозрачен (тот, что стоит на нижнем закрашенном треугольнике). Рассмотрим упорядоченный набор (вектор) из возможных углов поворота (для определенности, по часовой стрелке) закрашенных треугольников на каждом из 4 верхних стекол по отношению к нижнему закрашенному треугольнику: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, где $\alpha_k \in \{0°, 90°, 180°, 270°\}, k = 1, 2, 3, 4$.

Все «столбики» из стеклянных треугольников окажутся непрозрачными, если в этом наборе углов поворота обязательно встретится хотя бы один раз угол $90°$, обязательно встретится хотя бы один раз угол $180°$ и обязательно встретится хотя бы один раз угол $270°$ (а вот угол $0°$ не обязан встречаться, хотя и не помешает, если встретится). Чтобы посчитать общее количество таких наборов (а значит, и количество укладок с фиксированным вертикальным порядком стекол), разобьем их на четыре группы:

— наборы, в которых все углы поворота различны, т.е. все α_k попарно различны, таких наборов (за счет перестановок) всего 4! = 24 штуки;

— наборы, в которых углы поворота $180°$ и $270°$ встречаются по одному разу, а угол поворота $90°$ встречается два раза, таких наборов (за счет перестановок) всего 6·2 = 12 штук (здесь 6 — это количество мест в векторе для двух углов по $90°$, а 2 — это две перестановки углов $180°$ и $270°$ на оставшихся двух местах);

Решения типового варианта заключительного тура (11 класс)

— наборы, в которых углы поворота $90°$ и $270°$ встречаются по одному разу, а угол поворота $180°$ встречается два раза; аналогично, таких наборов (за счет перестановок) также всего 6·2 = 12 штук;
— наборы, в которых углы поворота $90°$ и $180°$ встречаются по одному разу, а угол поворота $270°$ встречается два раза; аналогично, таких наборов (за счет перестановок) всего 6·2 = 12 штук.

В итоге, получаем всего 24 + 12 + 12 + 12 = 60 упорядоченных наборов углов поворота, удовлетворяющих нужному условию. Это и есть общее количество укладок с фиксированным вертикальным порядком стекол, при которых итоговая стопка оказывается непрозрачной. Наконец, переставив стекла 5! = 120 способами, получим общее количество 120·60 =7200 укладок, при котором итоговая стопка оказывается непрозрачной.

Ответ: 7200 способов.

2. Решите уравнение $\sin^4(2025x)+\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)=1$. (12 баллов)

Решение:

$$\sin^4 2025x+\cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2018}2025x=1 \Leftrightarrow$$
$$(1-\cos^2 2025x)^2+\cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2018}2025x=1 \Leftrightarrow$$
$$\cos^4 2025x-2\cos^2 2025x+\cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2018}2025x=0 \Leftrightarrow$$
$$\cos^2 2025x(\cos^2 2025x+\cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2016}2025x-2)=0 \Leftrightarrow$$

1) $\cos 2025x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4050}+\dfrac{\pi n}{2025}$, $n\in Z$ или 2)

$$\cos^2 2025x+\cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2016}2025x=2 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^2 2025x=1,\\ \cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2016}2025x=1,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\sin 2025x=0,\\ \cos 2016x=1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi n}{2025}, n\in Z,\\ x=\dfrac{2\pi m}{2016}, m\in Z,\end{cases}$$

$$\frac{n}{2025}=\frac{m}{1008},\ n=\frac{2025m}{1008}=\frac{225m}{112},\ n\in Z,\ m\in Z \Rightarrow m=112k,\quad x=\frac{\pi k}{9},\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4050}+\dfrac{\pi n}{2025}$, $n\in Z$, $x=\dfrac{\pi k}{9}$, $k\in Z$.

3. Все члены бесконечной геометрической прогрессии являются натуральными числами. Сумма третьего, пятого и седьмого членов этой прогрессии равна $819\cdot 6^{2016}$. Найдите знаменатель прогрессии. (16 баллов)

Решение: Имеем геометрическую прогрессию $b_1, b_1q, b_1q^2, \cdots, b_1q^{n-1}, \cdots$, причем $b_1q^{n-1}\in N$ для любого номера $n\in N$. Таким образом, b_1 и q являются натуральными числами. По условию $b_3+b_5+b_7=819\cdot 6^{2016}$, или $b_1q^2+b_1q^4+b_1q^6=2^{2016}\cdot 3^{2018}\cdot 7\cdot 13$,

Решения типового варианта заключительного тура (11 класс)

$b_1q^2(1+q^2+q^4)=2^{2016}\cdot 3^{2018}\cdot 7\cdot 13$. Натуральное число $1+q^2+q^4$ при любом $q\in N$ есть нечетное число, следовательно, $1+q^2+q^4=3^k\cdot 7^l\cdot 13^m$, где $k\in\{0,1,\ldots,2018\}$, $l,m\in\{0,1\}$.

1) Если $k=0$, то $1+q^2+q^4=7^l\cdot 13^m$, $l\in\{0,1\}$.

   a) При $l=0$ получаем уравнение $q^2+q^4=13^m$, которое не имеет натуральных решений (дискриминант $D=1+4\cdot 13^m$ равен 5 при $m=0$, и равен 53 при $m=1$.

   b) При $l=1$, $m=0$ получаем уравнение $q^2+q^4-7=0$, которое не имеет натуральных решений ($D=29$).

   c) При $l=1$, $m=1$ получаем уравнение $q^2+q^4-90=0$, $q^2=9$, $q=3$. При этом $b_1=6^{2016}$.

2) Если $k=1$, то $1+q^2+q^4=3\cdot 7^l\cdot 13^m$, $l,m\in\{0,1\}$.

   a) При $l=0$, $m=0$ получаем уравнение $q^2+q^4-2=0$, $q^2=1$, $q=1$. При этом $b_1=6^{2016}\cdot 3\cdot 91$.

   b) При $l=0$, $m=1$ получаем уравнение $q^2+q^4-38=0$, которое не имеет натуральных решений ($D=153$).

   c) При $l=1$, $m=0$ получаем уравнение $q^2+q^4-20=0$, $q^2=4$, $q=2$. При этом $b_1=2^{2014}\cdot 3^{2017}\cdot 13$.

   d) При $l=1$, $m=1$ получаем уравнение $q^2+q^4-272=0$, $q^2=16$, $q=4$. При этом $b_1=2^{2012}\cdot 3^{2017}$.

3) Если $k\in\{2,\ldots,2018\}$, $l,m\in\{0,1\}$, то $1+q^2+q^4=3^k\cdot 7^l\cdot 13^m$. Для полученного биквадратного уравнения $q^2+q^4+1-3^k\cdot 7^l\cdot 13^m=0$ вычислим дискриминант $D=1-4(1-3^k\cdot 7^l\cdot 13^m)=3(4\cdot 3^{k-1}\cdot 7^l\cdot 13^m-1)$. Поскольку при $k\in\{2,\ldots,2018\}$, $l,m\in\{0,1\}$, число $4\cdot 3^{k-1}\cdot 7^l\cdot 13^m$ делится на 3, то $4\cdot 3^{k-1}\cdot 7^l\cdot 13^m-1$ не делится на 3, и $\sqrt{D}$ является иррациональным числом. Следовательно, уравнение $q^2+q^4+1-3^k\cdot 7^l\cdot 13^m=0$ натуральных корней не имеет.

Ответ: задача имеет четыре решения: 1) $q=1$; 2) $q=2$; 3) $q=3$; 4) $q=4$.

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что площадь треугольника ADE равна $0{,}5$. Вписанная в четырехугольник $BDEC$ окружность касается стороны AB в точке K, причем $AK=3$. Найдите тангенс угла BAC, если около четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность, и $BC=15$. (20 баллов)

Решение: Пусть O_1 - центр вписанной в треугольник ABC окружности, R - ее радиус, O_2 - центр вписанной в треугольник ADE окружности, r - ее радиус. Обозначим p_1 полупериметр треугольника ABC, p_2 полупериметр треугольника ADE. Тогда $AK=p_2$, $AK=p_1-BC$. Действительно, по свойствам касательных к окружности имеем (см. рис.)

$$2AK=AK+AH=AD+DK+EH+AE=AD+(DM+ME)+AE=2p_2,$$

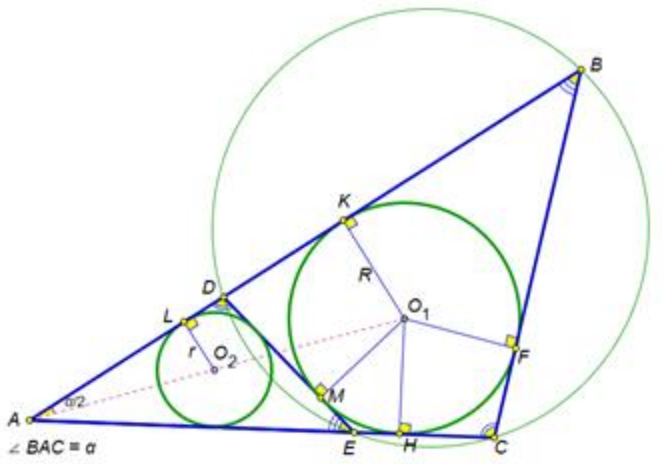
$$2AK=(AB-BK)+(AC-CH)=AB+AC+(BF+CF)-2(BF+CF)=2(p_1-BC).$$

Тогда $r = S_{ADE}/p_2 = S_{ADE}/AK = 1/6$.

Поскольку около четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность, то $\angle ABC + \angle DEC = 180°$, и $\angle AED = \angle ABC$. Следовательно, треугольники ADE и ACB подобны, и $\dfrac{r}{R} = \dfrac{p_2}{p_1}$, $R = \dfrac{r(AK + BC)}{AK} = \dfrac{3+15}{6 \cdot 3} = 1$.

Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}(\alpha/2) = R/AK = 1/3$, и $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}(\alpha/2)/(1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)) = 3/4$.

Ответ: $3/4$.



5. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_{|x+3|}(ax+4a) = 2\log_{|x+3|}(x+y), \\ x+1+\sqrt{x^2+2x+y-4} = 0 \end{cases}$$

имеет два различных решения, и найдите эти решения при каждом a. (20 баллов)

Решение: Рассмотрим второе уравнение системы $x+1+\sqrt{x^2+2x+y-4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1, \\ y = 5. \end{cases}$

Следовательно, $\begin{cases} \log_{|x+3|}(ax+4a) = 2\log_{|x+3|}(x+y), \\ x+1+\sqrt{x^2+2x+y-4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-(a-10)x+25-4a = 0, \\ y = 5, \\ -5 < x \le -1,\ x \ne -4,\ x \ne -3,\ x \ne -2. \end{cases}$

Выясним, при каких значениях параметра a уравнение $x^2-(a-10)x+25-4a = 0$ (*) имеет два различных решения, если $-5 < x \le -1,\ x \ne -4,\ x \ne -3,\ x \ne -2$.

Решения типового варианта заключительного тура (11 класс)

1) Выясним, при каких a точки $x=-4$, $x=-3$, $x=-2$ являются решениями уравнения (*).

$x=-4$ не является решением ни при каком a;

$x=-3$ является единственным решением уравнения (*) при $a=4$, поскольку
$D=a(a-4)=0$;

$x=-2$ является решением (*) при $a=4{,}5$, поскольку при подстановке $x=-2$ в уравнение (*) имеем $2^2+2a-20+25-4a=0,\ 2a=9.$ При $a=4{,}5$ уравнение (*) имеет второе решение $x=-3{,}5$, удовлетворяющее поставленным условиям. Следовательно, при $a=4{,}5$ система имеет единственное решение.

2) Пусть $a\neq 4{,}5$ и $D=a(a-4)>0$. При этом уравнение (*) будет иметь два различных решения, удовлетворяющих условию $-5<x\le -1,$ если

$-5<\dfrac{a-10}{2}<-1,\ f(-5)>0,\ f(-1)\ge 0,$ где $f(x)=x^2-(a-10)x+25-4a$. Имеем $f(-5)=a$,

$f(-1)=16-3a$, приходим к системе неравенств $\begin{cases} a(a-4)>0, \quad a\neq 4{,}5, \\ 0<a<8, \\ a>0, \\ 16-3a\ge 0, \end{cases}$, и

$a\in(4;\,4{,}5)\cup(4{,}5;\,16/3].$

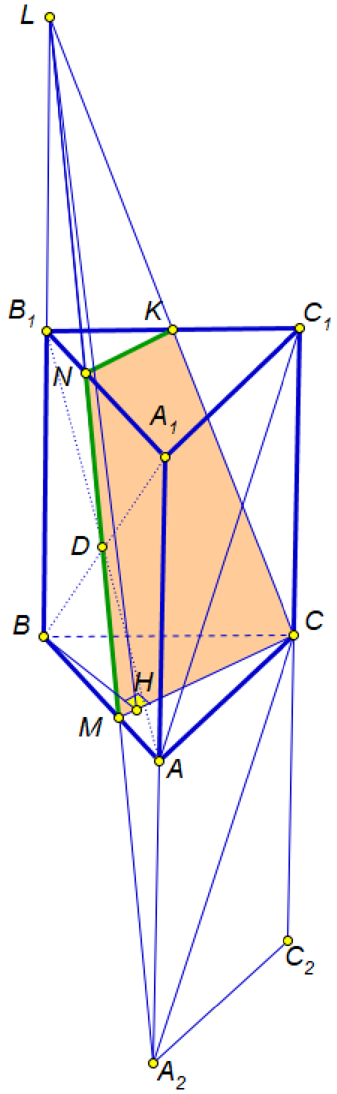
Ответ: при $a\in(4;\,4{,}5)\cup(4{,}5;\,16/3]$ два решения $x_{1/2}=\dfrac{a-10\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$, $y_{1/2}=5.$

Решения типового варианта заключительного тура (11 класс)

6. Найдите объемы частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходящая через вершину C и центр симметрии боковой грани AA_1B_1B, если площадь сечения призмы этой плоскостью равна 21, а сторона основания призмы равна $2\sqrt{14}$. (20 баллов)

Решение:

1) Построение сечения.



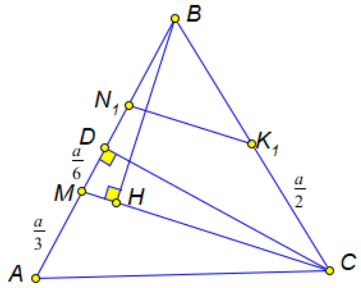
В плоскости боковой грани AA_1C_1C через точку C проведем прямую A_2C, параллельную AC_1, точка A_2 - точка пересечения AA_1 и A_2C, $AA_1 = AA_2$. Пусть D – центр симметрии боковой грани AA_1B_1B. Через точку D проводим прямую A_2D, принадлежащую плоскости сечения. Точка M - точка пересечения AB и A_2D, точка N - точка пересечения A_1B_1 и A_2D, точка L - точка пересечения прямой BB_1 и A_2D, $AM = NB_1$, $BM = NA_1 = 2AM$, $AA_2 = BB_1 = B_1L$. Если обозначить сторону основания призмы через *a*, высоту призмы через *h*, то $AM = B_1N = a/3$, $BM = NA_1 = 2a/3$, $BB_1 = B_1L = h$.

В плоскости основания $A_1B_1C_1$ через точку N проведем прямую NK, параллельную MC, точка K - точка пересечения NK и B_1C_1.

Трапеция $MNKC$ - искомое сечение.

2) Спроецируем сечение на плоскость основания ABC призмы. Пусть N_1 и K_1 - проекции точек N и K на плоскость ABC. Тогда $N_1K_1 \parallel MC$, $BK_1 = K_1C$. Проекцией сечения на плоскость основания ABC является трапеция CMN_1K_1, ее площадь

$$S_{пр} = S_{BMC} - S_{BN_1K_1} = S_{ABC}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = 7\sqrt{3}.$$



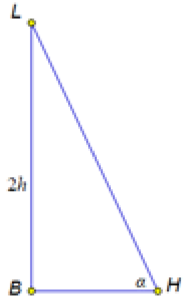
3) Найдем косинус угла α наклона плоскости сечения к плоскости основания призмы. $S_{сеч} = S_{пр}/\cos\alpha \Leftrightarrow$

$\cos\alpha = S_{пр}/S_{сеч} = 1/\sqrt{3}$.

4) Найдем высоту призмы *h*. Построим плоскость BHL, проходящую через точку B и перпендикулярную MC линии пересечения основания и плоскости сечения

Решения типового варианта заключительного тура (11 класс)

($BH \perp MC, LH \perp MC$).Угол α наклона плоскости сечения к плоскости основания равен углу BHL , $BL = 2h$.



5) $BH \cdot CM = BM \cdot CD,\ BH = \dfrac{BM \cdot CD}{CM} = \dfrac{\dfrac{2a}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}a}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{6}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{6},$

$\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$, $\sin\alpha = 2/\sqrt{6}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$, $2h = BL = BH\ \operatorname{tg}\alpha = 4\sqrt{3}$, $h = 2\sqrt{3}$.

6) $V_{LBMC} = \dfrac{1}{3} S_{BMC} \cdot BL = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} S_{ABC} \cdot BL = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{18} \cdot BL = \dfrac{112}{3}$.

$V_{LB_1NK} = \dfrac{1}{8} V_{LBMC}$, $V_{BMCB_1NK} = \dfrac{7}{8} V_{LBMC} = \dfrac{98}{3}$, $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot BB_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = 84$,

$V_{AMCA_1NKC_1} = 84 - \dfrac{98}{3} = \dfrac{154}{3}$.

Ответ: $\dfrac{112}{3}$, $\dfrac{154}{3}$.