Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»
МАТЕМАТИКА (заключительный этап)
2018-2019 учебный год
9 класс

Вариант - 3

1. *(15 баллов)* Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{|x-2|}\right)(x^2-2x+2+|x-2|) \le \sqrt{15+2x-x^2}.$$

2. *(15 баллов)* В трапеции *ABCD* точки *K,N* принадлежат отрезку *BC*, *BK*=*KN*=*NC*=1, а точки *P,Q* принадлежат отрезку *AD, AP*=*PQ*=*QD*=*2*. Прямые *BC* и *AD* параллельны. Точка *K* соединена с точками *A,P,Q,D*. Точка Р соединена с точками *B,K,N,C*. Докажите, что точки пересечения прямых *BP* и *AK*, *KQ* и *PN*, *KD* и *PC* лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка этой прямой между боковыми сторонами трапеции.

3. *(15 баллов)* Степан решил выставить на аукцион 44 страуса редкой породы, стартовая стоимость каждой особи равнялась 2,5 тыс. рублей. После продажи выяснилось, что средняя цена каждой птицы выросла на столько тысяч рублей, сколько страусов не продал Степан. Какую наибольшую сумму денег мог получить Степан? Какое количество птиц при этом он мог продать?

4. *(15 баллов)* Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} (x-3)^2+(a-2)^2 \le 9 \\ 4a-3x \le 8 \\ 2a \le 13-3x \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение, и указать решения системы для каждого значения а.

5. *(20 баллов)* В прямоугольной трапеции *ABCD* (*AD*$\|$*BC*) угол *A* равен 60^0. На стороне *CD* выбирается точка *К* так, что *ВК=2ВС*, при этом *AD=CD*. Биссектриса $\angle BDC$ пересекает сторону *BC* в точке *N*, а *АК* и *DN* пересекаются в точке *P*. Найдите величину угла *DPB* в градусах.

6. *(20 баллов)* Ксюша, Ваня и Вася решили пойти в кино. Они договорились встретиться на автобусной остановке, но не знают, кто во сколько придёт. Каждый из них может прийти в случайный момент времени с 15.00 до 16.00. Вася самый терпеливый: если он придёт и на остановке не будет ни Ксюши, ни Вани, то он будет ждать кого-нибудь из них 15 минут, и если никого не дождётся, то пойдет в

кино один. Ваня менее терпеливый: он будет ждать лишь 10 минут. Ксюша самая нетерпеливая: она вообще не будет ждать. Однако если Ваня и Вася встретятся, то они будут ждать Ксюшу до 16.00. Определить вероятность того, что в кино они пойдут все вместе.

Решения. 9 класс. Вариант 3.

№1. (15 баллов) Решить неравенство:

$$\left(\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{|x-2|}\right)(x^2-2x+2+|x-2|) \le \sqrt{15+2x-x^2}$$

Решение:

Докажем, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b) \ge 4$.

Раскрыв скобки, получаем: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$, учитывая, что числа положительные $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \ge 0$.

Поскольку на ОДЗ уравнения имеем $x^2-2x+2>0$, $|x-2|>0$, применяя доказанное неравенство получаем, что для любого x левая часть неравенства не меньше 4.

В то же время правая часть неравенства

$\sqrt{15+2x-x^2} = \sqrt{16-(x-1)^2} \le 4$.

Следовательно, неравенство равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{|x-2|}\right)(x^2-2x+2+|x-2|) = 4 \\ \sqrt{15+2x-x^2 = 4} \end{cases}$$

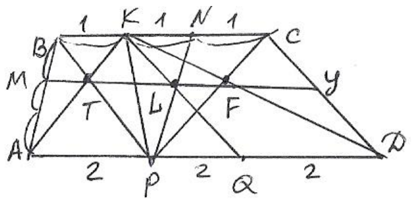
Из второго уравнения находим, что $x=1$, подставляем в первое уравнение системы, получаем, что $x=1$ его решение, следовательно, $x=1$ решение исходного неравенства.

Ответ: $x=1$**.**

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки
10	Верно выполнены оценки обеих частей неравенства и/или задача сведена к равносильной системе уравнений

5	Верно выполнена оценка одной части неравенства
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№2. (15 баллов) В трапеции ABCD точки K,N принадлежат отрезку BC, BK=KN=NC=1, а точки P,Q принадлежат отрезку AD, AP=PQ=QD=2. Прямые BC и AD параллельны. Точка K соединена с точками A,P,Q,D. Точка P соединена с точками B,K,N,C. Докажите, что точки пересечения прямых BP и AK, KQ и PN, KD и PC лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка этой прямой между боковыми сторонами трапеции.



1) Пусть $BP \cap AK = T,\ KD \cap PC = F,\ KQ \cap PN = L$;

2) $\Delta\, BTK \backsim \Delta\, ATP,\ \frac{KT}{AT} = \frac{1}{2}$

3) $\Delta\, KLN \backsim \Delta\, PLQ,\ \frac{KL}{LQ} = \frac{1}{2}$

4) $\Delta\, TKL \backsim \Delta\, AKQ,\ \ TL \parallel AQ$

5) $\Delta\, KFC \backsim \Delta\, PFD,\ \frac{KF}{FD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta\, KLF \backsim \Delta\, KQD,\ \ LF \parallel QD$

6) $TL \parallel AD,\ LF \parallel AD$, следовательно точки T, L, F лежат на одной прямой, параллельной AD;

7) Пусть $TL \cap AB = M,\ \ TL \cap CD = Y$. Тогда по обобщенной

теореме Фалеса $\frac{BM}{MA} = \frac{1}{2} = \frac{CY}{YD}$

8) Проведем BE параллельно CD, тогда $BEDC$ параллелограмм по определению и $ED=BC=3$. Прямая TL пересекает BE в точке Z, $\frac{BZ}{ZE} = \frac{1}{2}$ по обобщенной теореме Фалеса , тогда $ZY=3$, а $MZ=\frac{AE}{3} = 1, MY = 4$.

Ответ: 4.

Баллы	Критерии выставления
15 б	Полное обоснованное решение.
10 б	Присутствуют доказательство и верный ответ, но есть недостатки в обосновании.
5 б	Присутствует доказательство того, что точки лежат на одной прямой **или** вычислена длина отрезка**.**

№3. (15 баллов) Степан решил выставить на аукцион 44 страуса редкой породы, стартовая стоимость каждой особи равнялась 2,5 тыс. рублей. После продажи выяснилось, что средняя цена каждой птицы выросла на столько же тысяч рублей, сколько страусов не продал Степан. Какую наибольшую сумму денег мог получить Степан? Какое количество птиц при этом он мог продать?

Решение. Пусть х – количество непроданных страусов, тогда (44-х)-количество проданных страусов, (2,5+х) -средняя цена 1 проданной птицы. (44-х)(2,5+х) –стоимость проданных страусов.Рассмотрим функцию

у=(44-х)(2,5+х) – стоимость проданных страусов.

$x_в$=20,75. Так как х- натуральное число, то х=20 или х=21. Если х=20, то у=540, при этом страусов продали 24 штуки.

Если х=21, то у=540,5, при этом страусов продали 23 штуки.

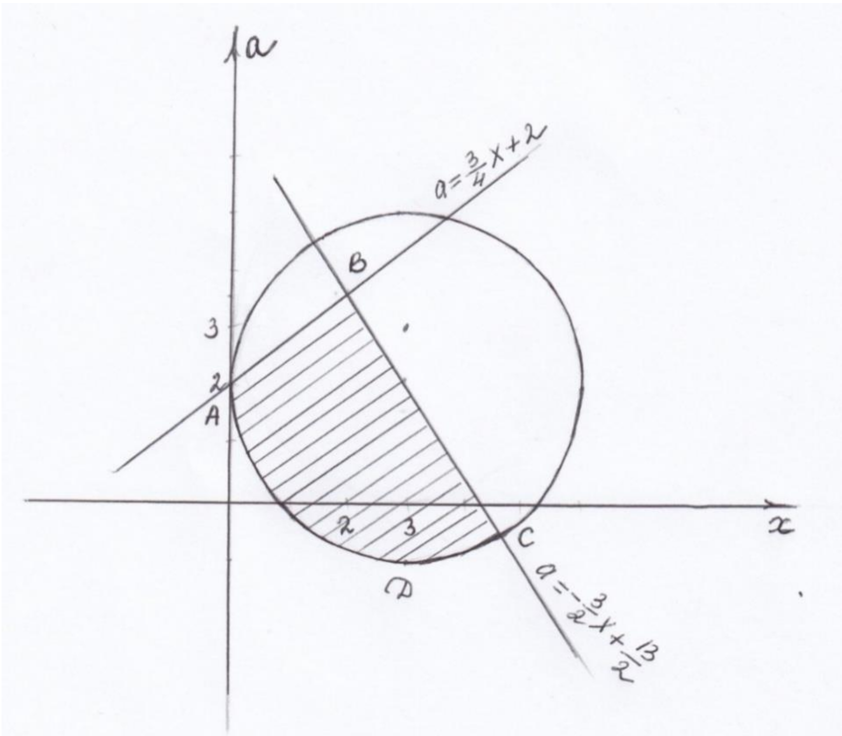
***<u>Ответ</u>*. а) наибольшая сумма, которую мог получить Степан 540,5 тыс рублей;**

б) наибольшее количество птиц - 23 штуки.

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка .
5	Решено подбором значений переменной, удовлетворяющих условию задачи.
2	Наблюдаются отдельные догадки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

№4. (15 баллов) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases}(x-3)^2+(a-2)^2\le 9\\ 4a-3x\le 8\\ 2a\le 13-3x\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение, и указать решения системы для каждого значения а.

Преобразуем систему к виду $\begin{cases}(x-3)^2+(a-2)^2\le 3^2\\ a\le \dfrac{3}{4}x+2\\ a\le -\dfrac{3}{2}x+\dfrac{13}{2}\end{cases}$ и начертим в одной системе координат в осях x, a графики окружности и двух прямых $a=\dfrac{3}{4}x+2$ и $a=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{13}{2}$ (см. рисунок).



Заштрихованная область удовлетворяет всем неравенствам системы. Точка D(3;-1) – нижняя точка окружности. Найдём координаты точки B – точки пересечения прямых: $\dfrac{3}{4}x+2=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{13}{2}$; B(2;3,5). Из рисунка видно, что $a\in[-1;3,5]$ соответствует хотя бы одно значение x, то есть при этих значениях параметра существует хотя бы одно решение. Чтобы выписать сами решения, найдём ещё координаты точек A и C пересечения окружности с прямыми. Подставим вместо a в уравнение окружности a= $\frac{3}{4}x+2$,

получим уравнение $(x-3)^2+(\frac{3}{4}x+2-2)^2=9$; $\frac{25}{16}x^2-6x=0$, имеющее корни $x_1=0$; $x_2=\frac{96}{25}$. Таким образом, A(0;2). Аналогично находятся координаты точки C.

$(x-3)^2+(\frac{3}{4}x+2-2)^2=9$; $13x^2-78x+108=0$; $x_{1,2}=3\pm\frac{6}{\sqrt{13}}$. Точка C имеет координаты $(3+\frac{6}{\sqrt{13}};2-\frac{9}{\sqrt{13}})$.

Выразим x через a из уравнения окружности: $x_{1,2}=3\pm\sqrt{(a+1)(5-a)}$. Теперь с помощью проделанного исследования можно по графику записать ответ.

Ответ: $a\in[-1;3,5]$ **- система имеет хотя бы одно решение.** $a=-1, x=3$ **;**

$a\in(-1;2-\frac{9}{\sqrt{13}}], x\in[3-\sqrt{(a+1)(5-a)};3+\sqrt{(a+1)(5-a)}]$ **;**

$a\in(2-\frac{9}{\sqrt{13}};2], x\in[3-\sqrt{(a+1)(5-a)};\frac{13-2a}{3}]$ **;** $a\in(2;3,5), x\in[\frac{4a-8}{3};\frac{13-2a}{3}]$

Баллы	**Критерии выставления**
15 баллов	Полное обоснованное решение
13 баллов	Одна – две неправильно поставленные скобки (например, интервал вместо отрезка при выписыварии решений) .
10 баллов	Графики построены правильно, ход решения верный. Ответ незначительно отличается от правильного из-за арифметической ошибки при нахождении координат одной из точек пересечения графиков. Или небольшие ошибки (описки) при выписке решений.
5 баллов	Правильно найдены только значения параметра, при которых система имеет хотя бы одно решение. Сами решения в

	зависимости от параметра не указаны или указаны неверно .

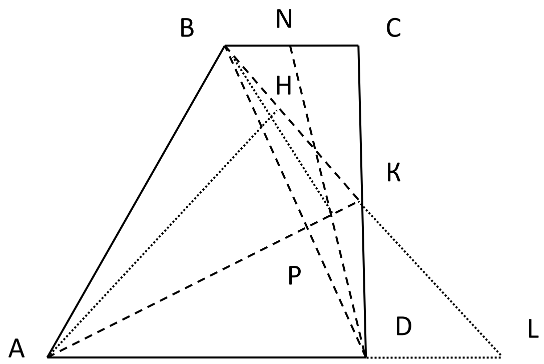
№5. (20 баллов)

В прямоугольной трапеции ABCD (AD││BC) угол A равен 60^0. На стороне CD выбирается точка К так, что ВК=2ВС, при этом AD=CD. Биссектриса $\angle$BDC пересекает сторону ВС в точке N, а АК и DN пересекаются в точке Р. Найдите величину угла DPB в градусах.

1.1Продолжим ВК до пересечения с прямой AD в точке L.

Треугольник ABL – правильный, так как из ВК=2ВС =>$\angle$КВС=60^0 =>$\angle$ABL=120^0–60^0=60^0. $\angle$BKC=30^0 =>$\angle$BKD =150^0 (смежный).

Проведем отрезок АН$\perp$ ВК =>AH = CD = AD (AH и CD – высоты).



Треугольники АНК и AKD – равны по гипотенузе АК и катетам АН и AD => АК – биссектриса $\angle$BKD => Р – точка пересечения биссектрис DN и АК треугольника BKD.

По свойству точки пересечения биссектрис: $\angle$DPB=90^0+0,5 $\angle$BKD=90^0+75^0=165^0.

Ответ: 165^0.

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
7	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты(например, AH=AD), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№6. (20 баллов).

Ксюша, Ваня и Вася решили пойти в кино. Они договорились встретиться на автобусной остановке, но не знают, кто во сколько придёт. Каждый из них может прийти в случайный момент времени с 15.00 до 16.00. Вася самый терпеливый: если он придёт и на остановке не будет ни Ксюши, ни Вани, то он будет ждать кого-нибудь из них 15 минут, и если никого не дождётся, то пойдет в кино один. Ваня менее терпеливый: он будет ждать лишь 10 минут. Ксюша самая нетерпеливая: она вообще не будет ждать. Однако если Ваня и Вася встретятся, то они будут ждать Ксюшу до 16.00. Определитьвероятность того, что в кино они пойдут все вместе.

Ответ: $\frac{107}{864}$.

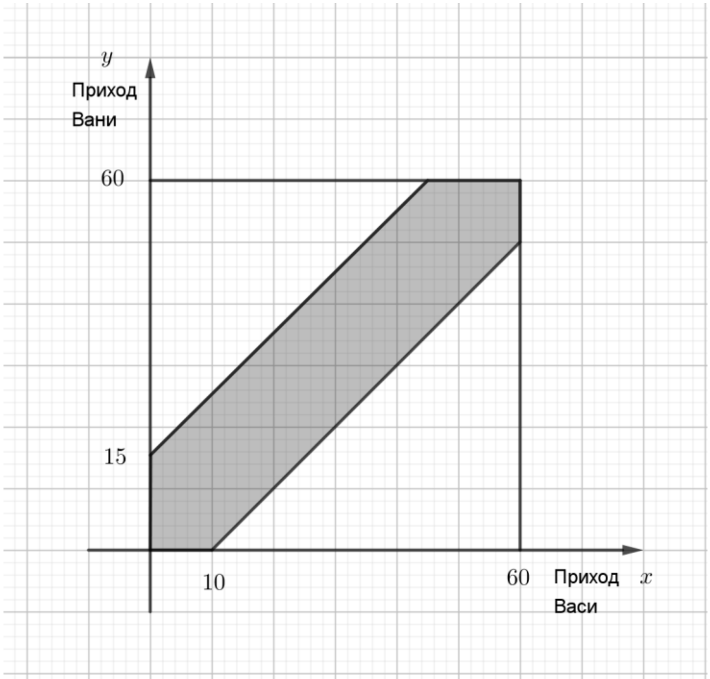
Решение. Так как Ксюша совсем не будет ждать, то ребята пойдут в кино, только если Ксюша придет последней. Время прихода ребят – независимые события, следовательно,

$$P(\text{все трое пойдут в кино вместе}) =$$
$$= P(\text{Ксюша придёт последней}) \cdot P(\text{Ваня и Вася встретятся}).$$

Далее,

$$P(\text{Ксюша придёт последней}) = \frac{\text{число подходящих вариантов}}{\text{число перестановок из 3 элементов}} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}.$$

Вторая вероятность находится геометрически. Обозначим: x - момент прихода Васи, y - момент прихода Вани, $0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60$. Тогда область $\begin{cases} y \ge x \\ y - x \le 15 \end{cases}$ соответствует тому, что первым пришел Вася и он дождался прихода Вани, а область $\begin{cases} y \le x \\ x - y \le 10 \end{cases}$ - тому, что первым пришел Ваня и он дождался прихода Васи. Таким образом, получаем благоприятную область для события «Ваня и Вася встретятся»:



Следовательно,

$$P(\text{Ваня и Вася встретятся}) = \frac{60^2 - \frac{1}{2}\cdot 45^2 - \frac{1}{2}\cdot 50^2}{60^2} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) = \frac{107}{288},$$

$$P(\text{все трое пойдут в кино вместе}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{107}{288} = \frac{107}{864}.$$

Баллы	**Критерии выставления**
20	Обоснованно получен правильный ответ.
10	Построена вероятностная модель, в рамках которой возможно получение правильного ответа (например, в решении задачи используется координатная плоскость для определения геометрической вероятности соответствующих событий).
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий.