Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»

МАТЕМАТИКА (заключительный этап)

2018-2019 учебный год

9 класс

Вариант -1

1. *(12 баллов)* В классе меньше **30** человек. Учитель заметил, что вероятность выбора отличницы среди девочек равна $\frac{3}{13}$, а вероятность выбора отличника среди мальчиков равна $\frac{4}{11}$. Сколько в классе отличников?

2. *(12 баллов)* Площадь ромба равна 8 кв. см. Каждую его сторону продлили на четверть своей длины в обе стороны. Концы всех этих отрезков соединили. Найдите площадь полученной фигуры.

3. *(16 баллов)* Катя хочет купить корм для кошек. В прошлый раз вся покупка обошлась ей в 48 рублей. В магазине выяснилось, что стоимость одной упаковки выросла на столько рублей, на сколько число 5,5 больше числа купленных упаковок товара. Известно, что за всю покупку Катя заплатила наибольшую из возможных сумму денег. Определите эту сумму. Сколько упаковок корма было куплено? Определите стоимость одной упаковки.

4. *(20 баллов)* Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 6x + 7 \\ y = |x - a| - 2 \end{cases}$ имеет четыре различных решения. Найдите эти решения при каждом значении a.

5. *(20 баллов)* В остроугольном треугольнике *ABC* на медиане *AM* выбирается точка *K* так, что *AK* = *CM*. Через точку *K* и вершину *B* проводится прямая, которая пересекает сторону *AC* в точке *E*. Величина угла *BEC* в два раза больше величины угла *CAM*. Найдите величину угла *AMB* в градусах.

6. ***(**20 баллов**)*** Решите неравенство:

$$\left|\sqrt{4-\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{2-|3x+1|}}\right| \mathrm{i} \left|\left|\sqrt{\frac{4x^2-(2x-1)^2}{x}}-1\right|-\left|\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{9x^2+6x+1}}}{\sqrt{2-|3x+1|}}\right|\right|.$$

Решения. 9 класс. Вариант 1.

№1. (12 баллов**)** В классе меньше 30 человек. Учитель заметил, что вероятность выбора отличницы среди девочек равна $\frac{3}{13}$, а вероятность выбора отличника среди мальчиков равна $\frac{4}{11}$. Сколько в классе отличников?

Ответ: 7.

Решение. Вероятность выбора отличницы среди девочек равна

$$\frac{3}{13}=\frac{\text{количество девочек-отличниц}}{\text{количество девочек}}.$$

Учитывая, что количество девочек – число натуральное и их меньше 30, находим, что в классе либо 13 девочек (3 отличницы), либо 26 (6 отличниц).

Применяя те же рассуждения к мальчикам, находим, что

$$\frac{4}{11}=\frac{\text{количество мальчиков-отличников}}{\text{количество мальчиков}}.$$

Следовательно, в классе либо 11 мальчиков (4 отличника), либо 22 мальчика (8 отличников). Так как в классе меньше 30 человек, определяем, что в классе 13 девочек (3 отличницы) и 11 мальчиков (4 отличника). Значит, в классе количество отличников $3+4=7$.

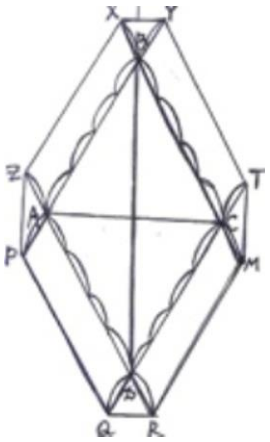
Ответ: 7.

Баллы	Критерии выставления
12	Обоснованно получен правильный ответ.
8	Получен правильный ответ, но в решении не учтены все возможные варианты количеств мальчиков и девочек в классе.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий.

№2. (12 баллов). Площадь ромба равна 8 кв. см. Каждую его сторону продлили на четверть своей длины в обе стороны. Концы всех этих отрезков соединили. Найдите площадь полученной фигуры.

Решение. Площадь искомой фигуры можно рассматривать как сумму площади исходного ромба, четырех равных параллелограммов площадью 2 кв. см каждый и двух пар равновеликих треугольников площадью 0,25 кв. см. Возможны другие разбиения или дополнительные построения. Площадь фигуры 17 кв. см. Необходимо обосновать равенство площадей и показать знание формул для вычисления площади треугольника и параллелограмма.

Ответ: 17 кв. см



Баллы	Критерии выставления
12 баллов	Обоснованное правильное решение
10 баллов	Правильный ответ при некоторой недостаточности объяснений.
5 баллов	Верные рассуждения с арифметической ошибкой.

№3. (16 баллов) Катя хочет купить корм для кошек. В прошлый раз вся покупка обошлась ей в 48 рублей. У подруги она узнала, что товар подорожал. В магазине выяснилось, что стоимость одной упаковки выросла на столько рублей, на сколько число 5,5 больше числа купленных упаковок товара. Известно, что за всю покупку Катя заплатила наибольшую из возможных сумму денег. Определите эту сумму. Сколько упаковок корма было куплено? Определите стоимость одной упаковки.

Решение. Пусть x – количество купленных упаковок корма, тогда 5,5-x –на сколько рублей выросла стоимость одной упаковки. (5,5-x) x -на сколько рублей выросла стоимость покупки. y=48+(5,5-x) x рублей стоимость покупки.

$y=48+(5{,}5-x)\,x= - x^2+5{,}5x+48$

$x_в$ =2,75;

x_1=3, y_1=48+2,5*3=55,5;наибольшая из возможных сумма денег.

x_2=2, y_2=48+3,5*2=55;

одна упаковка стоит 18,5 рублей.

<u>Ответ</u>. а) 55,5- наибольшая из возможных сумма денег;

б)куплено 3упаковки корма;

в) одна упаковка стоит 18,5 рублей.

Примечание. Можно решать по другому. $x \in (0;5,5)$ и $x \in N$, значит $x \in \{1;2;3;4;5\}$

x_1=3, y_1=48+2,5*3=55,5 наибольшая из возможных сумма денег.

x_2=2, y_2=48+3,5*2=55;

x_3=1, y_3=48+4,5*1=52,5;

x_4=4, y_4=48+1,5*4=54;

x_5=5, y_5=48+0,5*5=50,5;

***<u>Ответ</u>*. а) 55,5- наибольшая из возможных сумма денег;**

б) куплено 3 упаковки корма;

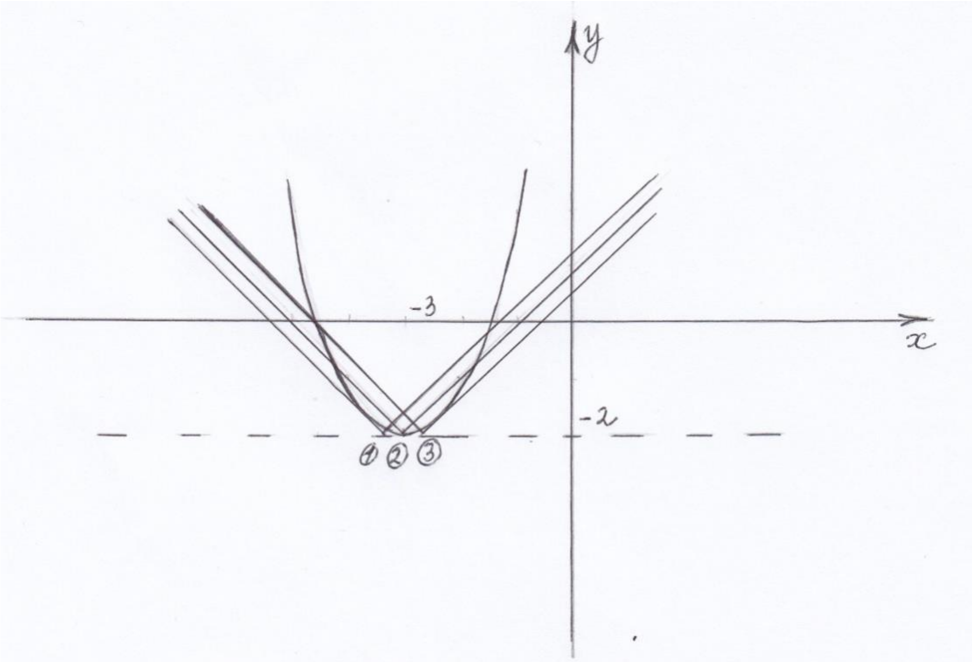
в) одна упаковка стоит 18,5 рублей.

Баллы	**Критерии выставления**
16	Обоснованно получен правильный ответ.
10	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка .
5	Решено подбором значений переменной, но без учёта ОДЗ.
2	Наблюдаются отдельные догадки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

№4. (20 баллов) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 6x + 7 \\ y = |x - a| - 2 \end{cases}$ имеет четыре различных решения. Найдите эти решения при каждом a.

Решение. Перепишем систему в виде $\begin{cases} y=(x+3)^2-2 \\ y=|x-a|-2 \end{cases}$. Первое уравнение системы –уравнение параболы с вершиной (-3;2). График второго уравнения – смещённый график функции $y=|x|$, вершина которого перемещается в зависимости от параметра вдоль горизонтальной прямой $y=-2$.

На рисунке график функции $y=|x-a|-2$ изображён в предельных случаях, соответствующих трём различным решениям системы:



(1) – левая ветвь графика модуля касается параболы; (2) – вершины графиков совпадают; (3) – правая ветвь модуля касается параболы. Если вершина графика модуля расположена между точками, соответствующими случаям (1) и (2) или (2) и (3), то графики будут иметь четыре точки пересечения и, следовательно, система будет иметь четыре решения.

В случае (2) $a=-3$. Найдём значения параметра, соответствующие случаям (1) и (3). $y=\left[\begin{array}{l} x-a-2, x\geq a \\ -x+a-2, x<a \end{array}\right.$. Для случая (1) получим уравнение $x^2+6x+7=-x+a-2$; $x^2+7x+9-a=0$.

При касании графиков дискриминант этого уравнения должен быть равен нулю, при пересечении в двух точках больше нуля. $D=49-4(9-a)=13+4a=0; a=-\dfrac{13}{4}$.Выразим корни через параметр для положительного дискриминанта:

$x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{13+4a}}{2}$.

Для случая (3) получим уравнение: $x^2+6x+7=x-a-2$; $x^2+5x+9+a=0$;

$D=25-4(9+a)=-11-4a=0$. $x_{3,4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{-11-4a}}{2}$.

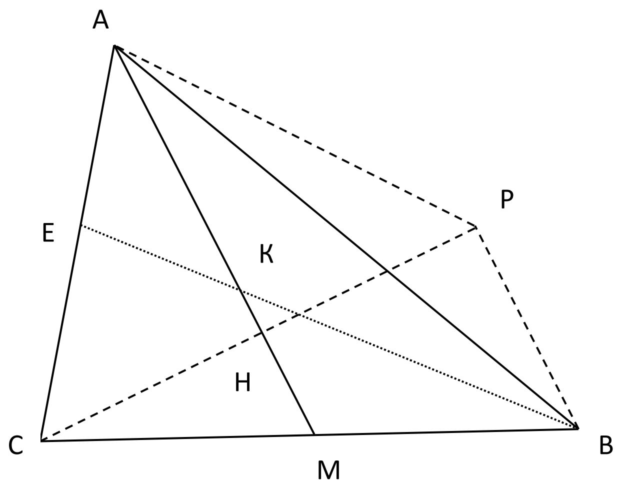
Таким образом, система имеет 4 решения при $a\in(-\dfrac{13}{4};-3)\cup(-3;-\dfrac{11}{4})$.

Ответ: $(-\dfrac{13}{4};-3)\cup(-3;-\dfrac{11}{4})$ $x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{13+4a}}{2}$; $x_{3,4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{-11-4a}}{2}$.

Баллы	**Критерии выставления**
20 баллов	Полное обоснованное решение
15 баллов	Ответ по параметру отличается от правильного одной точкой, решения выписаны; или верно найдены значения параметра, но не указаны сами решения.
10 баллов	Правильно выполнено больше половины решения, но оно не завершено; или из-за арифметической ошибки получен неправильный ответ.
0 баллов	В остальных случаях – 0 баллов. Только правильный ответ без решения.

№5. (20 баллов) В остроугольном треугольнике ABC на медиане AM выбирается точка K так, что AK = CM. Через точку K и вершину B проводится прямая, которая пересекает сторону AC в точке E. Величина угла BEC в два раза больше величины угла CAM. Найдите величину угла AMB в градусах.

Решение. Проведем отрезок CH⊥AM и продолжим его до P так, что HP = HC=> PB ││AM.



Треугольник САР – равнобедренный (АН – медиана и высота) поэтому ∠PAM =∠MAC, но ∠MAC=∠AKE (так как величина угла BEC в два раза больше величины угла CAM), ∠AKE=∠MKB (вертикальные), ∠MKB =∠KBP (накрест лежащие), следовательно, KB ││AP, поэтому AKBP - параллелограмм.

В прямоугольном треугольнике CPB длина CB=2PB, т.е. ∠PCB=30^0. Итак, ∠AMB=120^0.

Ответ: 120^0.

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
7	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№6. (20 баллов**)** Решите неравенство:

$$\left|\sqrt{4-\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{2-|3x+1|}}\right| \geq \left|\left|\sqrt{\frac{4x^2-(2x-1)^2}{x}}-1\right|-\left|\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{9x^2+6x+1}}}{\sqrt{2-|3x+1|}}\right|\right|$$

Решение:

Преобразуем правую часть неравенства, получим

$$\left|\left|\sqrt{\frac{4x^2-(2x-1)^2}{x}}-1\right|-\left|\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{9x^2+6x+1}}}{\sqrt{2-|3x+1|}}\right|\right| =$$

$$\left|\left|\sqrt{\frac{4x-1}{x}}-1\right|-\left|\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{(3x+1)^2}}}{\sqrt{2-|3x+1|}}\right|\right|=$$

$$\left|\left|\sqrt{4-\frac{1}{x}}-1\right|-\left|\frac{1-\sqrt{2-|3x+1|}}{\sqrt{2-|3x+1|}}\right|\right|=\left|\left|\sqrt{4-\frac{1}{x}}-1\right|-\left|\frac{1}{\sqrt{2-|3x+1|}}-1\right|\right|$$

Заметим, что если сделать замену $a=\sqrt{4-\frac{1}{x}}-1;\ b=\frac{1}{\sqrt{2-|3x+1|}}-1,$ то исходное неравенство примет вид: $|a-b|\geq|a|-|b|$, что верно при любых значениях a и b.

Докажем, это. Возведем обе части неравенства в квадрат, получим:

$$|a-b|^2\geq(|a|-|b|)^2 \iff (a-b)^2\geq(|a|-|b|)^2 \iff$$

$$a^2-2ab+b^2 \geq |a|^2-2\,|a||b|+|b|^2 \iff -2ab\geq-2\,|a||b| \iff ab\leq |ab|$$

, что верно для любых значений a и b.

Следовательно, исходное неравенство верно на ОДЗ:

$$\begin{cases} 4-\dfrac{1}{x}\geq 0 \\ 2-|3x+1|>0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{4x-1}{x}\geq 0 \\ -2<3x+1<2 \end{cases} \iff \begin{cases} x\in(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{1}{4};\ +\infty\right) \\ x\in\left(-1;\ \dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$$

Получаем ответ: $x\in(-1;0)\cup\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}\right)$

Ответ: $x\in(-1;0)\cup\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}\right)$**.**

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованно получен правильный ответ
15	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки
10	Задача сведена к неравенству $|a-b|\geq|a|-|b|$, неравенство доказано
5	Задача сведена к неравенству $|a-b|\geq|a|-|b|$
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий