Отборочный этап академического соревнования Олимпиады школьников

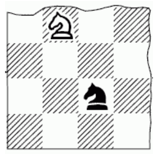
«Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика»

Типовой вариант задания

1. Имеется 2-литровая банка, полностью наполненная молоком 4% жирности, и 3-литровая банка с 2 литрами обезжиренного молока. Назовем «обменом» такую операцию: сначала 3-литровую банку доливают до краев содержимым 2-литровой банки, затем делают наоборот. Какое минимальное количество «обменов» нужно совершить, чтобы концентрация жира в банках различалась менее чем на 0,01%? (5 баллов)

2. Решите уравнение $x^2+y^2+1+\sqrt{4x^2+4y^2-34}=2|x+y|-2xy$. В ответ запишите минимальное значение суммы $x+y$, для которой пара $(x;\,y)$ является решением данного уравнения. (5 баллов)

3. Решите неравенство $\sqrt[4]{1-\cos^{15}3\pi x\cos^2 5\pi x}\le\sin 5\pi x$. В ответ запишите сумму всех решений, принадлежащих отрезку $[1;\,3,2]$. (6 баллов)



4. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске, состоящей из 14×14 клеток двух коней – белого и черного так, чтобы они угрожали друг другу? (Конь ходит буквой «Г», т.е. он может пойти на одно из полей, ближайших к тому, на котором он стоит, но не на той же самой горизонтали, вертикали или диагонали.) (12 баллов)

5 Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 105 натуральных делителя (включая единицу и само число). (12 баллов)

6. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB, если его стороны OA и OB лежат на графике функции $y=x+2|x|$, а прямая AB проходит через точку $M(0;1)$? (12 баллов)

7. Биссектрисы AN и BM треугольника ABC пересекаются в точке O, причем $BO:OM=3:2$, $ON=\sqrt{6}$. В четырехугольник $ONCM$ вписана окружность. Найдите высоту треугольника ABC, проведенную из вершины A. (16 баллов)

8. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(x^2+12x+11+\left(\frac{|x+6|}{x+6}+\frac{|x+2|}{x+2}+\frac{a}{2}\right)^2\right)\sqrt{a-14x-34}=0$$

имеет ровно два различных решения. В ответ запишите сумму всех целых найденных значений a. (16 баллов)

9. Найдите объем меньшей из частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходящая через середину стороны AB основания ABC и точку M, лежащую на стороне B_1C_1, если $MC_1=3B_1M$, расстояние от точки B_1 до секущей плоскости равно 6, а сторона основания призмы равна $12\sqrt{14}$. (16 баллов)

1. Имеется 2-литровая банка, полностью наполненная молоком 4% жирности, и 3-литровая банка с 2 литрами обезжиренного молока. Назовем «обменом» такую операцию: сначала 3-литровую банку доливают до краев содержимым 2-литровой банки, затем делают наоборот. Какое минимальное количество «обменов» нужно совершить, чтобы концентрация жира в банках различалась менее чем на 0,01%?

Решение: Обозначим через c_k и C_k концентрации жира (в %) в меньшей и в большей банке после k «обменов». В начале $c_0 = 4$, $C_0 = 0$. Если в трехлитровую банку с 2 л молока с процентным содержанием жира, равным C_k, доливают 1 л молока с процентным содержанием жира, равным c_k, то жирность молока в трехлитровой банке становится равной $C_{k+1} = \frac{2C_k + c_k}{3}$. В результате обратного переливания 1 л молока концентрации C_{k+1} в двухлитровую банку, концентрация жира в ней становится равной $c_{k+1} = \frac{1}{2}\left(c_k + \frac{2C_k + c_k}{3}\right) = \frac{2c_k + C_k}{3}$. В итоге имеем $c_{k+1} - C_{k+1} = \frac{2c_k + C_k}{3} - \frac{2C_k + c_k}{3} = \frac{c_k - C_k}{3}$. Следовательно, $c_k - C_k = 3^{-k}(c_0 - C_0) = 4 \cdot 3^{-k}$. Решаем неравенство $c_k - C_k = 4 \cdot 3^{-k} < 0{,}01 \Leftrightarrow$ $400 < 3^k$. Так как $3^5 = 243 < 400 < 729 = 3^6$, то минимальное число обменов $k = 6$. **Ответ: 6**

2. Решите уравнение $x^2 + y^2 + 1 + \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 34} = 2|x + y| - 2xy$. В ответ запишите минимальное значение суммы $x + y$, для которой пара $(x; y)$ является решением данного уравнения.

Решение: $x^2 + y^2 + 1 + \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 34} = 2|x + y| - 2xy$

$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 2|x + y| + 1 + \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 34} = 0 \Leftrightarrow$

$(x + y)^2 - 2|x + y| + 1 + \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 34} = 0 \Leftrightarrow (|x + y| - 1)^2 + \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 34} = 0 \Leftrightarrow$ (оба слагаемые неотрицательны) $(|x + y| - 1)^2 = 0$ и $\sqrt{4x^2 + 4y^2 - 34} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |x+y| = 1, \\ 4x^2 + 4y^2 - 34 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+y=1, \\ x+y=-1, \end{array}\right. \\ 4x^2 + 4y^2 - 34 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1-x, \\ y=-1-x, \end{array}\right. \\ 4x^2 + 4y^2 - 34 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1-x, \\ 4x^2 + 4y^2 - 34 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1-x, \\ 4x^2 + 4y^2 - 34 = 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1-x, \\ 4x^2 - 4x - 15 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1-x, \\ 4x^2 + 4x - 15 = 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2{,}5,\ y = -1{,}5, \\ x = -1{,}5,\ y = 2{,}5, \\ x = -2{,}5,\ y = 1{,}5, \\ x = 1{,}5,\ y = -2{,}5. \end{array}\right.$$

Ответ: **-1**

3. Решите неравенство $\sqrt[4]{1 - \cos^{15} 3\pi x \cos^2 5\pi x} \le \sin 5\pi x$. В ответ запишите сумму всех решений, принадлежащих отрезку $[1; 3{,}2]$.

Решение: При условии $\sin 5\pi x \ge 0$ обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. При указанных ограничениях неравенство равносильно следующему:

$\sin^4 5\pi x + \cos^{15} 3\pi x \cos^2 5\pi x - 1 \ge 0$, $(1 - \cos^2 5\pi x)^2 + \cos^{15} 3\pi x \cos^2 5\pi x - 1 \ge 0$,

$-2\cos^2 5\pi x+\cos^4 5\pi x+\cos^{15} 3\pi x\cos^2 5\pi x\ge 0$, $\cos^2 5\pi x(\cos^2 5\pi x+\cos^{15} 3\pi x-2)\ge 0$. Таким образом, приходим к совокупности уравнений:

1) $\cos 5\pi x=0$, $x=\dfrac{1}{10}+\dfrac{n}{5}$, $n\in Z$, с учетом условия $\sin 5\pi x\ge 0$ имеем $x=\dfrac{1}{10}+\dfrac{2n}{5}$, $n\in Z$.

2) $\cos^2 5\pi x+\cos^{15} 3\pi x-2=0$, что равносильно системе уравнений

$\begin{cases}\cos^2 5\pi x=1,\\ \cos^{15} 3\pi x=1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5\pi x=\pi k,\\ 3\pi x=2\pi m,\end{cases}$ $k,\ m\in Z.$ Следовательно, $3k=10m,\ k,m\in Z$

$\Rightarrow m=3s,\ k=10s,\ s\in Z \Rightarrow x=2s,\ s\in Z$, что удовлетворяет условию $\sin 5\pi x\ge 0$.

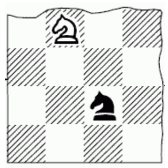
Таким образом, решения исходного неравенства: $x=\dfrac{1}{10}+\dfrac{2n}{5},\ n\in Z,\ \ x=2s,\ \ s\in Z.$

Найдем сумму решений, принадлежащих отрезку $[1;3,2]$:

1,3 + 1,7 + 2,1 + 2,5 + 2,9 + 2 = 12,5.

Ответ: 12,5

4. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске, состоящей из 14×14 клеток двух коней – белого и черного так, чтобы они угрожали друг другу? (Конь ходит буквой «Г», т.е. он может пойти на одно из полей, ближайших к тому, на котором он стоит, но не на той же самой горизонтали, вертикали или диагонали.)



Решение: Свяжем с доской $n\times n$ $(n>2)$ прямоугольную систему координат. Обозначим координаты двух коней через $(x_1;\,y_1)$ и $(x_2;\,y_2)$, где $x_k,\,y_k\in\{1,2,\dots,n\},\quad k=1,2.$ Кони угрожают друг другу, если 1) $|x_1-x_2|=1,\quad |y_1-y_2|=2$ или 2) $|x_1-x_2|=2,\quad |y_1-y_2|=1$. В первом случае есть четыре такие возможности:

$1\le x_1\le n-1,\ x_2=x_1+1,\quad 1\le y_1\le n-2,\ y_2=y_1+2;$

$1\le x_1\le n-1,\ x_2=x_1+1,\quad 1\le y_2\le n-2,\ y_1=y_2+2;$

$1\le x_2\le n-1,\ x_1=x_2+1,\quad 1\le y_1\le n-2,\ y_2=y_1+2;$

$1\le x_2\le n-1,\ x_1=x_2+1,\quad 1\le y_2\le n-2,\ y_1=y_2+2.$

Каждому из этих подслучаев соответствуют по $(n-1)(n-2)$ позиции. Второй случай отличается от первого поворотом на 90°. При $n=16$ имеем $8(n-1)(n-2)=8\cdot 13\cdot 12=1248$.

Ответ: 1248

5. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 105 натуральных делителя (включая единицу и само число).

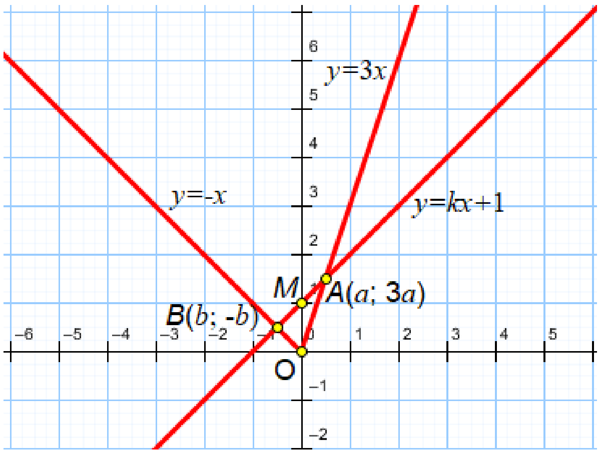
Решение: Пусть n – искомое натуральное число, $n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{k_m}$ - разложение числа n на простые сомножители. Любой натуральный делитель этого числа имеет вид $d=p_1^{l_1}\cdot p_2^{l_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{l_m}$, где $l_i\in\{0,1,\dots,k_i\},\ i=1,\dots,m.$ Число делителей числа n равно $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1)=105.$ Разложим число 105 на неединичные сомножители всеми возможными способами и выберем наименьшее число n. Поскольку $105=3\cdot 5\cdot 7,$ то имеем пять случаев:

1) $105=105$, наименьшее число $n=2^{104}>2^6\cdot 2^7\cdot 2^5>2^6\cdot 3^4\cdot 5^2$;
2) $105=35\cdot 3$, наименьшее число $n=2^{34}\cdot 3^2>2^6\cdot 2^4\cdot 3^2\cdot 2^5>2^6\cdot 3^4\cdot 5^2$;
3) $105=21\cdot 5$, наименьшее число $n=2^{20}\cdot 3^4>2^6\cdot 3^4\cdot 2^{14}>2^6\cdot 3^4\cdot 5^2$;

4) $105 = 15 \cdot 7$, наименьшее число $n = 2^{14} \cdot 3^6 > 2^6 \cdot 3^4 \cdot 2^8 > 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2$;
5) $105 = 7 \cdot 5 \cdot 3$, наименьшее число $n = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 129600$.

Ответ: 129600

6. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB, если его стороны OA и OB лежат на графике функции $y = x + 2|x|$, а прямая AB проходит через точку $M(0;1)$?

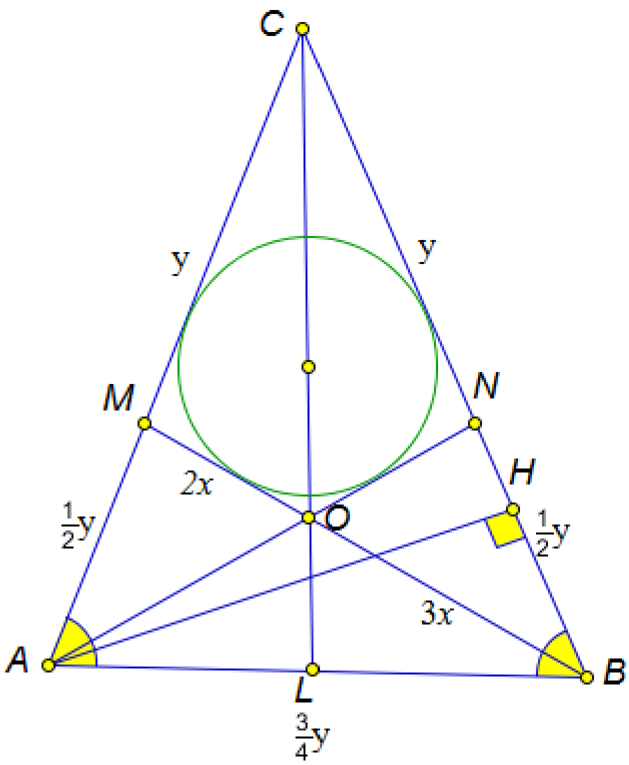


Решение: $S_{AOB} = S_{AOM} + S_{BOM}$, $A(a;3a)$, $B(b;-b)$, $S_{AOM} = \frac{1}{2} OM \cdot a$, $S_{BOM} = \frac{1}{2} OM \cdot (-b)$, $OM = 1$, $S_{AOB} = \frac{a-b}{2}$. Прямая AB проходит через точку M, ее уравнение $y = kx + 1$. Выразим переменные a и b через параметр k, подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой AB: $3a = ka + 1$, $a = \frac{1}{3-k}$, $-b = kb + 1$, $b = -\frac{1}{k+1}$. Выразим площадь треугольника

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-k} + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{2}{3 + 2k - k^2} = \frac{2}{4 - (k-1)^2}.$$

Поскольку $4 - (k-1)^2 \le 4$, то $S_{AOB} = \frac{2}{4-(k-1)^2} \ge \frac{1}{2}$. Наименьшее значение $\min S_{AOB} = \frac{1}{2}$ при $k = 1$. **Ответ: 0,5**

7. Биссектрисы AN и BM треугольника ABC пересекаются в точке O, причем $BO : OM = 3:2$, $ON = \sqrt{6}$. В четырехугольник $ONCM$ вписана окружность. Найдите высоту треугольника ABC, проведенную из вершины A.



Решение:

1) Проведем биссектрису CL треугольника ABC, точка $O \in CL$. Центр вписанной в четырехугольник $ONCM$ окружности лежит на CO. Следовательно, OC является биссектрисой угла NOM, и $\Delta ONC = \Delta OMC$ (по стороне OC и двум прилежащим к ней углам). Имеем $ON = OM = \sqrt{6}$, $NC = MC$. Так как $BO : OM = 3:2$, $OM = \sqrt{6}$, то $BO = 1{,}5\sqrt{6}$, $BM = 2{,}5\sqrt{6}$.

2) Пусть $MC = NC = y$. Так как CO - биссектриса в ΔBCM, то $BC : CM = BO : OM = 3:2$, $BC = 1{,}5y$, $BN = 0{,}5y$.

3) Имеем $\Delta OBN = \Delta OAM$, поскольку $ON = OM$, $\angle BON = \angle AOM$ (вертикальные углы), $\angle BNO = \angle AMO$ (углы, дополнительные к равным). Следовательно, $BN = AM$, и $BC = AC$, т.е. треугольник ABC равнобедренный.

4) Так как AO - биссектриса $\Delta\ AMB$, то $AB : AM = BO : OM = 3:2$, $AB = 1{,}5AM = 0{,}75y$.

5) Биссектриса CL является высотой равнобедренного $\Delta\ ABC$, $\cos\angle CAB = \dfrac{AL}{AC} = \dfrac{3y/8}{3y/2} = \dfrac{1}{4}$.

По теореме косинусов для $\Delta\ ABM$ имеем.

$BM^2 = AM^2 + AB^2 - 2AM\cdot AB\cos\angle CAB$**,** $37{,}5 = \dfrac{1}{4}y^2 + \dfrac{9}{16}y^2 - 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{4}y^2$ **,** $y = 2\sqrt{15}$.

Итак, $AC = CB = 1{,}5y = 3\sqrt{15}$, $AB = 0{,}75y = 1{,}5\sqrt{15}$.

6) Высота $AH = AB\sin\angle CAB = 0{,}75y\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{45}{8}$

Ответ: 5,625

8. Укажите все значения *a*, при которых уравнение

$$\left(x^2 + 12x + 11 + \left(\frac{|x+6|}{x+6} + \frac{|x+2|}{x+2} + \frac{a}{2}\right)^2\right)\sqrt{a - 14x - 34} = 0$$

имеет ровно два различных решения. В ответ запишите сумму всех целых найденных значений *a*.

Решение: Пусть $b = a/2$.

ОДЗ: $x \ne -6, x \ne -2,\ b - 7x - 17 \ge 0$

1) $b - 7x - 17 = 0,\quad x = \dfrac{b-17}{7}$.

2) $x^2 + 12x + 11 + \left(\dfrac{|x+6|}{x+6} + \dfrac{|x+2|}{x+2} + b\right)^2 = 0$

или $(x+6)^2 + \left(\dfrac{|x+6|}{x+6} + \dfrac{|x+2|}{x+2} + b\right)^2 = 25$

Раскроем модули:

2.1 $x < -6,\quad (x+6)^2 + (b-2)^2 = 25$,

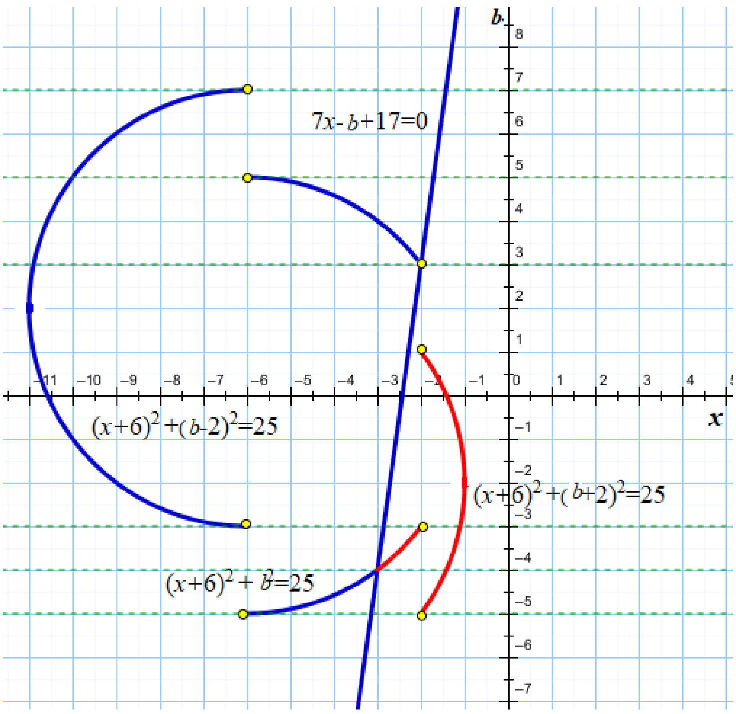
$x = -6 - \sqrt{25 - (b-2)^2}$;

2.2 $-6 < x < -2,\ (x+6)^2 + b^2 = 25$,

$x = -6 + \sqrt{25 - b^2}$;

2.3 $x > -2,\ (x+6)^2 + (b+2)^2 = 25$,

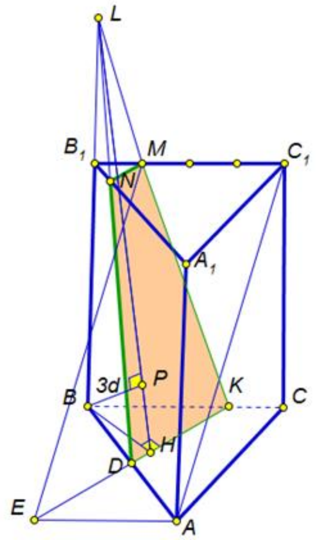
$x = -6 + \sqrt{25 - (b+2)^2}$.



В системе координат xOb построим графики полученных функций. Отметим ОДЗ, это полуплоскость $b - 7x - 17 \ge 0$ и точки, не принадлежащие прямым $x = -6, x = -2$. Прямые, параллельные оси Ox, пересекают отмеченные кривые ровно в двух точках при $b \in (-5; -4) \cup (-3; 3) \cup [5; 7)$. Поскольку $b = a/2$, то $a \in (-10; -8) \cup (-6; 6) \cup [10; 14)$. Находим сумму целых значений: $-9 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 10 + 11 + 12 + 13 = 37$.

Ответ: 37

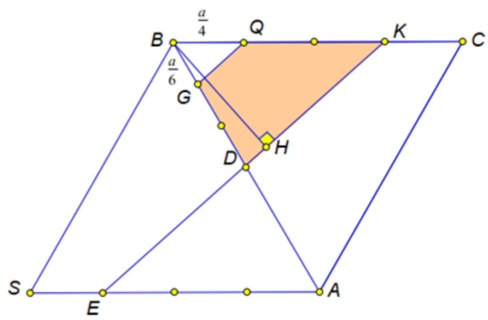
9. Найдите объемы частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходящая через середину стороны AB основания ABC и точку M, лежащую на стороне B_1C_1, если $MC_1 = 3B_1M$, расстояние от точки B_1 до секущей плоскости равно 6, а сторона основания призмы равна $12\sqrt{14}$. (20 баллов)



Решение: 1) Построение сечения. В плоскости основания ABC проводим прямую $EA \parallel B_1C_1$, $EA = MC_1$, $ME \parallel AC_1$, ME лежит в плоскости сечения. В плоскости основания ABC проводим прямую, соединяющую точку E с серединой D стороны AB, точка K - точка пересечения этой прямой со стороной BC. В плоскости основания $A_1B_1C_1$ проводим прямую MN, параллельную DK. Точка N - точка пересечения прямой MN со стороной A_1B_1.

Трапеция $DKMN$ - искомое сечение.

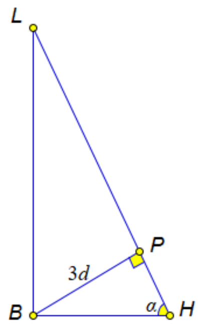
2) Спроецируем сечение на плоскость основания призмы. Обозначим сторону основания через a. Тогда $BK = 3a/4$, $BD = a/2$. Пусть Q - проекция точки M на основание ABC, $BQ = a/4$. Пусть G - проекция точки N на основание ABC. Поскольку $GQ \parallel DK$, то $BQ : BK = BG : BD$, и $BG = a/6$. Следовательно, $B_1N : BD = B_1M : BK = NM : DK = 1:3$.



3) Найдем косинус угла α наклона плоскости сечения к плоскости основания призмы. Расстояние d от точки B_1 до плоскости сечения равно трети расстояния от точки B до плоскости сечения ($BK = 3B_1M$, точки M, K принадлежат плоскости сечения, $BK \parallel B_1M$).

Строим плоскость BHL, проходящую через точку B и перпендикулярную DK линии пересечения основания и плоскости сечения ($BH \perp DK, LH \perp DK$). Проведем $BP \perp LH$, расстояние $3d$ равно BP. Угол наклона плоскости сечения к плоскости основания равен углу BHL.

$DK = \sqrt{DQ^2 + QK^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}/4\right)^2 + \left(a/2\right)^2} = a\sqrt{7}/4 = 21\sqrt{2}$,



$BH \cdot DK = BD \cdot BK \sin 60°$, $BH = \dfrac{3a\sqrt{3}}{4\sqrt{7}} = 9\sqrt{6}$.

В треугольнике BPH имеем $\sin\alpha = 3d/BH = 2/\sqrt{6}$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$, $BL = BH \cdot \operatorname{tg}\alpha = 18\sqrt{3}$.

4) $V_{LBDK} = \dfrac{1}{3} S_{BDK} \cdot BL = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} S_{ABC} \cdot BL = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{32} \cdot BL = 3402$.

$V_{LB_1NM} = \dfrac{1}{27} V_{LBDK}$, $V_{BDKB_1NM} = \dfrac{26}{27} V_{LBDK} = 3276$. **Ответ: 3276**