Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Олимпиада школьников «Шаг в будущее»

МАТЕМАТИКА (заключительный этап)

2018-2019 учебный год

9 класс

Вариант - 7

1. ***(10 баллов)*** Внутри ромба *ABCD* построен равносторонний треугольник *AM*B. Найдите угол *CMD*.

2. ***(10 баллов)*** Мимо бассейна объёмом 400м^3 литров воды шли 37 слонов. Часть из них решило освежиться. После их водных процедур выяснилось, что в среднем каждый слон использовал столько кубометров воды, сколько слонов не участвовали в купании. Известно, что в бассейне остался наименьший из возможных объём воды. Определите, какой объём воды остался в бассейне, сколько воды было израсходовано. Какое наибольшее количество слонов при таких условиях могло участвовать в купании?

3. ***(20 баллов)*** Определить количество решений системы $\begin{cases} (3-x)\cdot|x+1|=y \\ y-6=a\cdot(x-3) \end{cases}$

в зависимости от параметра a.

4. ***(20 баллов)*** Имеется 20 шаров с числами 1, 2, …, 10, каждое число встречается по два раза. Эти шары случайным образом раскладываются по два в 10 корзин. Из каждой корзины извлекается один шар. Какова вероятность того, что на извлеченных шарах все числа различны?

5. ***(20 баллов)*** Решите неравенство:

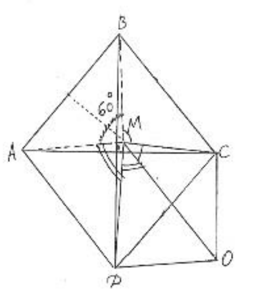
$$\frac{2x^2-x+7}{\sqrt{2x^2-x+3}}\le 7-\sqrt{9+\sqrt{16x^4-8x^2+1}}.$$

6. ***(20 баллов)*** Внутри выпуклого четырехугольника пять прямых делят его на шесть четырехугольников, а две его противоположные стороны – на шесть одинаковых частей каждую. Найдите площадь четвертого из полученных четырехугольников, если сумма площадей первого, пятого и шестого равна 60.

Решение. 9 класс. Вариант 7.

1. (10 баллов). Внутри ромба ABCD построен равносторонний треугольник AMB. Найдите угол CMD.

Решение.



Проведем отрезок MO, равный и параллельный BC. Четырехугольник MBCO - ромб и AMOD - ромб. Тогда

$$\angle OMC = \frac{1}{2}\angle BMO; \angle OMD = \frac{1}{2}\angle AMO; \angle AMO + \angle BMO = 360° - \angle AMB = 360° - 60° = 300°; \angle CMD = \angle OMD + \angle OMC = 150°$$

Ответ: $150°$

Баллы	Критерии выставления
10 баллов	Обоснованно доведено до правильного ответа.
5 баллов	Есть попытки использовать свойства фигур и соотношения углов, но ответ неверный.
0 баллов	Несвязные рассуждения.

2.(10 баллов). Мимо бассейна объёмом 400м^3 литров воды шли 37 слонов. Часть из них решило освежиться. После их водных процедур выяснилось, что в среднем каждый слон использовал столько кубометров воды, сколько слонов не участвовали в купании. Известно, что в бассейне остался наименьший из возможных объём воды. Определите какой объём воды остался в бассейне, сколько воды было израсходовано. Какое наибольшее количество слонов при таких условиях могло участвовать в купании?

Решение. Пусть x слонов не участвовали в купании или сколько воды использовал каждый слон при купании, тогда 37-x слонов участвовали в купании; (37-х) х – воды было израсходовано; 400-(37-х) х – остаток воды в бассейне.

$y= 400-(37-x)\,x$;

$y=400-(37-x)\,x = x^2-37x+400$;

$x_в =18{,}5$;

$x_1=18$, $y_1= 58$; купались 19 слонов.

$x_2=19$, $y_2=58$; купались 18 слонов.

Израсходовано 400-58=342 (м^3) воды.

Ответ. а) 58м^3 воды осталось в бассейне;

б) израсходовано 342 м^3 воды;

в) 19 слонов.

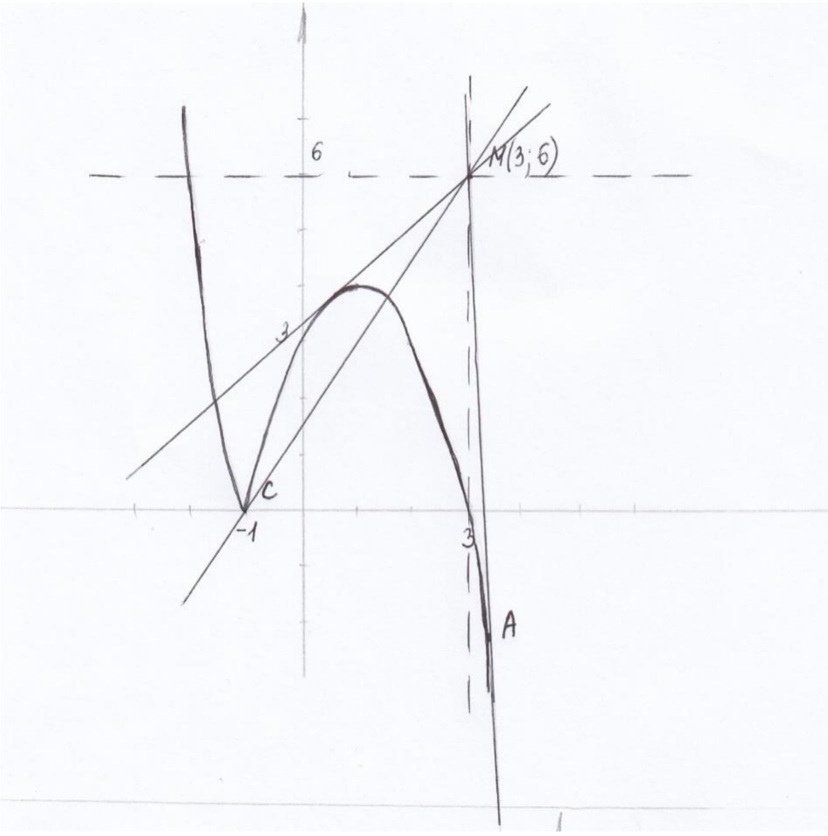
Баллы	Критерии выставления
10	Обоснованно получен правильный ответ.
8	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка .
5	Решено подбором значений переменной, но без учёта ОДЗ.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

3. (20 баллов). Определить количество решений системы $\begin{cases}(3-x)\cdot|x+1|=y\\ y-6=a\cdot(x-3)\end{cases}$

в зависимости от параметра a.

Построим графики функций, входящих в систему, в одной системе координат. Раскроем модуль в первом уравнении.

$y=\left[\begin{array}{l}(3-x)(x+1), x\ge -1\\ (x-3)(x+1), x<-1\end{array}\right.$ (1). График этой функции состоит из частей двух парабол, соединяющихся в точке с координатами (- 1;0). Второе уравнение – уравнение пучка прямых с переменным угловым коэффициентом, проходящих через точку M(3;6) (см. рисунок).



Вертикальная прямая, проходящая через точку М, имеет с графиком (1) только одну общую точку. Будем поворачивать прямую вокруг точки М против часовой стрелки. В положениях между вертикальным и касанием в точке А прямая пересечёт график в трёх различных точках (два раза направленную вниз правую ветвь и один раз направленную вверх левую). Найдём угловой коэффициент, соответствующий точке касания А. Составим уравнение

$(3-x)(x+1)=ax-3a+6$; $2x-x^2-3-ax+3a=0$; $x^2+x(a-2)+3-3a=0$.

$D=(a-2)^2-4(3-3a)=a^2+8a-8=0$; $a_{1,2}=-4\pm 2\sqrt{6}$. Значение $a=-4-2\sqrt{6}$ соответствует касательной МА, $a=-4+2\sqrt{6}$ соответствует другой касательной МВ. Определим, при каком значении параметра график проходит через точку С(-1;0). $0-6=a(-1-3); a=1{,}5$. С помощью проведённого исследования и графика запишем ответ.

Ответ: $a\in(-\infty;-4-2\sqrt{6})$ - 3 решения; $a=-4-2\sqrt{6}$ - 2 решения;
$a\in(-4-2\sqrt{6};-4+2\sqrt{6})$ - 1 решение; $a=-4+2\sqrt{6}$ - 2 решения;
$a\in(-4+2\sqrt{6};1{,}5)$ - 3 решения; $a=1{,}5$ - два решения; $a\in(1{,}5;+\infty)$ - 1 решение.

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованно получен правильный ответ.
15	Ход решения верный. Ответ незначительно отличается от

	правильного из-за арифметической ошибки.
10	При аналитическом решении рассмотрены обе системы, но результатов объединения нет.
5	Решение начато в правильном направлении (например, построены графики и задача сведена к определению количества точек пересечения). Однако дальнейшее решение неверно или не завершено.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

4.(20 баллов) Имеется 20 шаров с числами 1, 2, …, 10, каждое число встречается по два раза. Эти шары случайным образом раскладываются по два в 10 корзин. Из каждой корзины извлекается один шар. Какова вероятность того, что на извлеченных шарах все числа различны?

Решение. Пусть из i -ой корзины извлекается шар с номером a_i, после чего в корзине остается шар с номером b_i, $i=1,2,...,10$. Все исходы этого испытания можно описать последовательностью $a_1,b_1,a_2,b_2,...,a_{10},b_{10}$, в которой каждое число от 1 до 10 встречается по два раза. Всего таких перестановок с повторениями $\frac{20!}{(2!)^{10}}=\frac{20!}{2^{10}}$. В благоприятных исходах испытания числа $a_1,a_2,...,a_{10}$ и числа $b_1,b_2,...,b_{10}$ образуют перестановки от 1 до 10. Поэтому количество благоприятных исходов равно $(10!)^2$. Искомая вероятность равна $\frac{(10!)^2\cdot 2^{10}}{20!}$. Ответ: $\frac{(10!)^2\cdot 2^{10}}{20!}$.

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованно получен правильный ответ.
10	Построена вероятностная модель, но при подсчете или всех исходов, или благоприятных исходов допущена ошибка.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий.

5. (20 баллов). Решите неравенство:

$$\frac{2x^2-x+7}{\sqrt{2x^2-x+3}}\le 7-\sqrt{9+\sqrt{16x^4-8x^2+1}}$$

Решение:

Преобразуем правую и левую части неравенства:

$$\frac{2x^2-x+3+4}{\sqrt{2x^2-x+3}} \le 7-\sqrt{9+\sqrt{(4x^2-1)^2}}$$

$$\sqrt{2x^2-x+3}+\frac{4}{\sqrt{2x^2-x+3}} \le 7-\sqrt{9+|4x^2-1|}$$

ОДЗ неравенства есть все действительные числа. Переписав левую часть неравенства в виде $2\left(\frac{\sqrt{2x^2-x+3}}{2}+\frac{2}{\sqrt{2x^2-x+3}}\right)$ замечаем, что она не меньше 4, как удвоенная сумма двух взаимно обратных положительных величин, и только при $\frac{\sqrt{2x^2-x+3}}{2}=1$ она равна 4.

В то же время правая часть неравенства $7-\sqrt{9+|4x^2-1|}\le 4$

Следовательно, неравенство равносильно системе уравнений:

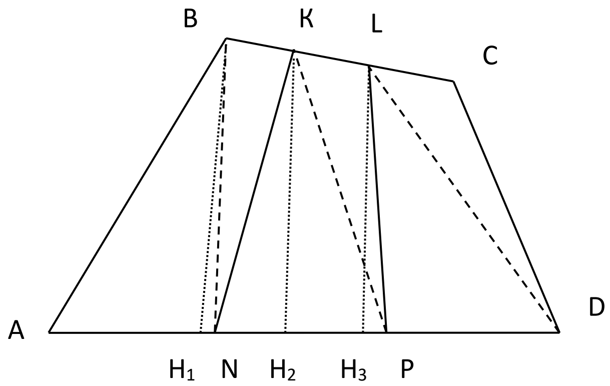
$$\begin{cases}\sqrt{2x^2-x+3}=2\\ \sqrt{9+|4x^2-1|}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-x-1=0\\ |4x^2-1|=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1;\ -0{,}5\\ x=\pm 0{,}5\end{cases} \Leftrightarrow x=-0{,}5$$

Ответ: $x=-0{,}5$.

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованно получен правильный ответ
15	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки
10	Верно выполнены оценки обеих частей неравенства и/или задача сведена к равносильной системе уравнений
5	Верно выполнена оценка одной части неравенства
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

6.(20 баллов) Внутри выпуклого четырехугольника пять прямых делят его на шесть четырехугольников, а две его противоположные стороны – на шесть одинаковых частей каждую. Найдите площадь четвертого из полученных четырехугольников, если сумма площадей первого, пятого и шестого равна 60.

Решение. Рассмотрим случай с двумя прямыми KN и LP. Пусть BH_1, KH_2, LH_3 – высоты треугольников ABN, NKP и PLD, соответственно.



Так как BH_1H_3L – трапеция, а KH_2 – ее средняя линия (по теореме Фалеса: $BH_1 || KH_2 || LH_3$ и BK=KL). Из условия задачи AN = NP = PD, поэтому $S_{KNP} = \frac{1}{2}(S_{ABN} + S_{DLP})$. Аналогично, $S_{KLP} = \frac{1}{2}(S_{KBN} + S_{DLC}) => S_{KLPN} = \frac{1}{2}(S_{KBAN} + S_{DPLC})$.

Получается, что площади четырехугольников составляют арифметическую прогрессию, так как в любой тройке выполняется условие среднего арифметического и для шести четырехугольников.

По свойству арифметической прогрессии: $S_4 = \frac{1}{3}(S_1 + S_5 + S_6) = 20$.

Ответ: 20.

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
7	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.