

Вариант - 5

1. (15 баллов) Павел поймал 32 рака и решил их продать на рынке. Когда у него купили часть улова, то оказалось, что покупатель заплатил за каждого на 4,5 рубля меньше, чем то количество раков, которое осталось лежать на прилавке. При этом мальчик заработал наибольшую сумму денег из всех возможных. Сколько денег заработал Павел? Сколько раков он продал?

2. (15 баллов) Найдите промежуток изменения коэффициента подобия треугольников с длинами сторон x, y, z и y, z, p . В ответе укажите ближайшие друг к другу целые числа, между которыми находится найденный промежуток.

3. (15 баллов) Решите неравенство:

$$\frac{2|2x-1|+2}{3} + \frac{6}{1+|2x-1|} \geq 4 - \sqrt{16x^4 - 8x^2 + 1}$$

4. (15 баллов) Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$(x^2 + (2a-1)x - 4a - 2) \cdot (x^2 + x + a) = 0$$
 имеет три различных корня.

5. (20 баллов) В остроугольном треугольнике ABC на стороне BC выбирается точка D так, что $CD:DB = 2:1$, а на отрезке AD — точка K , при этом $AK = CD + DK$. Через точку K и вершину B проводится прямая, которая пересекает сторону AC в точке E . Треугольник AEK — равнобедренный ($AE = EK$). Найдите величину угла ADC в градусах.

6. (20 баллов) Каждая из двух корзин содержит белые и черные шары, причем общее число шаров в обеих корзинах равно 25. Из каждой корзины наугад вынимают по одному шару. Известно, что вероятность того, что оба вынутых шара окажутся белыми, равна 0,54. Найти вероятность того, что оба вынутых шара окажутся черными.

Решение. 9 класс. Вариант 5

1. (15 баллов) Павел поймал 32 рака и решил их продать на рынке. Когда у него купили часть улова, то оказалось, что покупатель заплатил за каждого на 4,5 рубля меньше, чем то количество раков, которое осталось лежать на прилавке. При этом мальчик заработал наибольшую сумму денег из всех возможных. Сколько денег заработал Павел? Сколько раков он продал?

Решение. Пусть x – количество раков, которое осталось лежать на прилавке, тогда купили $(32-x)$ рака, $(x-4,5)$ – стоимость одного рака.

$(32-x)(x-4,5)$ -стоимость всех раков.

$$y=(32-x)(x-4,5)$$

$$x_в=18,25.$$

$$x_1=19, y_1=(32-19)(19-4,5)=13*14,5=188,5.$$

$$x_2=18, y_2=(32-18)(18-4,5)=14*13,5=189. \text{ Наибольшее количество } 14 \text{ штук.}$$

Ответ. а) наибольшая сумма денег 189 рублей;

б) продал 14 раков.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка .
5	Решено подбором значений переменной, удовлетворяющих условию задачи.
2	Наблюдаются отдельные догадки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

- 2.(15 баллов) Найдите промежуток изменения коэффициента подобия треугольников с длинами сторон x, y, z и y, z, p . В ответе укажите ближайшие друг к другу целые числа, между которыми находится найденный промежуток.

Решение. Запишем условие подобия треугольников.

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{p} = k; y^2 = xz; z^2 = yp \text{ или } x = yk, y = zk . \text{ Поскольку треугольники}$$

подобны, достаточно записать условия существования треугольника

(неравенство треугольника) только для одного из них $\begin{cases} k^2 + 1 > k \\ 1 + k > k^2 \\ k^2 + k > 1 \end{cases}$. Решая

систему этих условий, получаем, что $k \in \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)$. Все найденные

значения k лежат правее 0, но левее 2.

Ответ: 0 и 2.

Критерии проверки:

15 б	Полное обоснованное решение
10 б	Есть арифметическая ошибка при решении системы условий.
5 б	Выписаны не все условия существования треугольников или присутствует перебор целых значений коэффициента подобия.

3. Решить неравенство:

$$\frac{2|2x - 1| + 2}{3} + \frac{6}{1 + |2x - 1|} \leq 4 - \sqrt{16x^4 - 8x^2 + 1}$$

Решение:

ОДЗ неравенства есть все действительные числа. Переписав левую часть неравенства в виде $2\left(\frac{|2x-1|+1}{3} + \frac{3}{1+|2x-1|}\right)$, замечаем, что она не меньше 4, как удвоенная сумма двух взаимно обратных положительных величин, и только при $1 + |2x - 1| = 3$ она равна 4.

В то же время правая часть неравенства

$$4 - \sqrt{16x^4 - 8x^2 + 1} = 4 - \sqrt{(4x^2 - 1)^2} = 4 - |4x^2 - 1| \leq 4.$$

Следовательно, неравенство равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} 1 + |2x - 1| = 3 \\ 4 - |4x^2 - 1| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x - 1| = 2 \\ |4x^2 - 1| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,5; 1,5 \\ x = \pm 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -0,5$$

Ответ: $x = -0,5$.

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки
10	Верно выполнены оценки обеих частей неравенства и/или задача

	сведена к равносильной системе уравнений
5	Верно выполнена оценка одной части неравенства
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

4.(15 баллов) Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$(x^2 + (2a - 1)x - 4a - 2) \cdot (x^2 + x + a) = 0 \text{ имеет три различных корня.}$$

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x^2 + (2a - 1)x - 4a - 2 = 0 \\ x^2 + x + a = 0 \end{cases} \text{ и может иметь от нуля до четырёх корней. Оно}$$

имеет три различных корня, если одно из уравнений совокупности имеет два различных корня ($D > 0$), а другое один ($D = 0$) и этот корень не совпадает ни с одним из корней другого уравнения; или если оба уравнения имеют по два различных корня, но один из корней первого уравнения совпадает с одним из корней второго уравнения. Исследуем эти возможные варианты.

$D_1 = (2a - 1)^2 - 4(-4a - 2) = 4a^2 + 12a + 9 = (2a + 3)^2$. Первое уравнение всегда имеет решение: при $a = -1,5$ одно ($x = 2$), при остальных значениях

параметра – два различных решения $x_{1,2} = \frac{1 - 2a \pm (2a + 3)}{2} = \begin{cases} 2 \\ -2a - 1 \end{cases}$.

$D_2 = 1 - 4a$. Второе уравнение имеет одно решение при $a = 0,25$, два различных решения при $a < 0,25$, и не имеет решений при остальных a .

Исследуем теперь вопрос совпадения корней. Можно решать соответствующие иррациональные уравнения. Рассмотрим другой метод.

Если число x_0 является одновременно корнем двух различных уравнений

$$f(x) = 0 \text{ и } g(x) = 0, \text{ то } x_0 \text{ является одновременно и корнем уравнения}$$

$k_1 f(x) + k_2 g(x) = 0$ при любых k_1 и k_2 . Будем подбирать такие значения коэффициентов, чтобы сначала сократились слагаемые, содержащие x^2 , а затем свободные члены уравнений.

$$\text{При } k_1 = 1, k_2 = -1 \text{ получим } x^2 + (2a - 1)x - 4a - 2 - x^2 - x - a = 0;$$

$$(2a - 2)x - 5a - 2 = 0(1).$$

Затем возьмём $k_1 = a, k_2 = 4a + 2$. Получим уравнение

$$ax^2 + a(2a-1)x - 2a(2a+1) + 2(2a+1)x^2 + 2(2a+1)x + 2a(2a+1) = 0;$$

$(5a+2)x^2 + x(2a^2 - a + 4a + 2) = 0$. $x=0$ не является общим корнем уравнений, поэтому можно сократить на x . Получим

$$x(5a+2) + (2a^2 + 3a + 2) = 0(2).$$

Так как общий корень должен удовлетворять обоим полученным линейным уравнениям, для a должно выполняться соотношение

$(5a+2)^2 = (2-2a) \cdot (2a^2 + 3a + 2)$. $(5a+2)^2 = (2-2a) \cdot (2a^2 + 3a + 2)$. Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим уравнение

$4a^3 + 27a^2 + 18a = 0$, которое имеет три различных корня: 0 ; -6 ; $-0,75$. Все найденные значения параметра удовлетворяют условию существования корней второго уравнения $a \leq 0,25$.

Объединяя полученные значения со значениями, в которых равен нулю дискриминант одного из уравнений (в этих точках сдваивания корней нет), получим ответ.

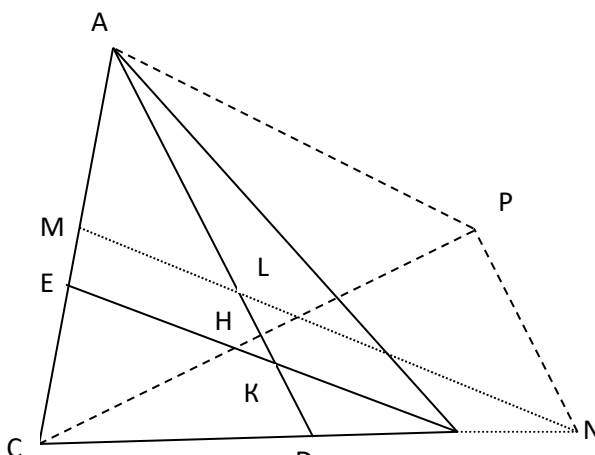
Ответ: -6 ; $-1,5$; $-0,75$; 0 ; $0,25$.

15 баллов	Полное обоснованное решение
10 баллов	Ход решения верен, все его этапы присутствуют, но из-за арифметической ошибки или невнимательности ответ отличается от правильного одним значением. Или при правильном ответе обоснования недостаточны
5 баллов	Правильно найдены только значения параметра, при которых равен нулю дискриминант одного из уравнений. Возможность совпадения корней двух квадратных трёхчленов не учитывается.
	Замечание. При графическом решении, возможном в 1 варианте, начисляем 3 балла за каждое правильно найденное значение параметра. Таким образом, при правильном ответе получится 15 баллов.

5.(20 баллов) В остроугольном треугольнике ABC на стороне BC выбирается точка D так, что $CD:DB = 2:1$, а на отрезке AD – точка K, при этом $AK = CD + DK$. Через точку K и вершину B проводится прямая, которая пересекает сторону AC в точке E. Треугольник AEK – равнобедренный ($AE = EK$). Найдите величину угла ADC в градусах.

Решение. Продолжим CB за точку B так, чтобы $BN = BD$. Проведем $NM \parallel BE$. NM пересекает AD в точке L . Проведем отрезок $CH \perp AD$. Продолжим его до P так, что $HP = HC$, $PN \parallel AD$.

В треугольнике DLN отрезок BK – средняя линия, следовательно, $DK = KL$ и поэтому $AL = AK - LK = AK - DK = CD$.



Треугольник CAP – равнобедренный (AH – медиана и высота) поэтому $\angle PAD = \angle DAC$, но $\angle DAC = \angle AKE$ (по условию), $\angle AKE = \angle ALM$ (соответственные), $\angle ALM = \angle NLD$ (вертикальные), $\angle NLD = \angle NLP$ (накрест лежащие), следовательно, $LN \parallel AP$, поэтому $ALNP$ – параллелограмм.

В прямоугольном треугольнике CPN длина $CN = 2CD = 2AL = 2PN$, т.е. $\angle PCN = 30^\circ$. Итак, $\angle ADC = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
7	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

6.(20 баллов) Каждая из двух корзин содержит белые и черные шары, причем общее число шаров в обеих корзинах равно 25. Из каждой корзины наугад вынимают по одному шару. Известно, что вероятность того, что оба

вынутых шара окажутся белыми, равна 0,54. Найти вероятность того, что оба вынутых шара окажутся черными.

Ответ: 0,04.

Решение. Пусть в i -ой корзине n_i шаров, среди которых k_i белых, $i = 1, 2$.

Тогда $\frac{k_1}{n_1} \cdot \frac{k_2}{n_2} = 0,54 = \frac{27}{50}$. Поэтому для некоторого натурального m

справедливы равенства $k_1 \cdot k_2 = 27m$, $n_1 \cdot n_2 = 50m$. Одно из чисел n_i делится на 5, тогда и второе из них тоже делится на 5 (так как $n_1 + n_2 = 25$).

Пусть $n_1 \leq n_2$. Возможны два случая:

1) $n_1 = 5$, $n_2 = 20$. Тогда $m = 2$, $k_1 \cdot k_2 = 54$, причем $k_1 \leq 5$, $k_2 \leq 20$, так что $k_1 = 3$, $k_2 = 18$.

2) $n_1 = 10$, $n_2 = 15$. Тогда $m = 3$, $k_1 \cdot k_2 = 81$, причем $k_1 \leq 10$, $k_2 \leq 15$, так что $k_1 = 9$, $k_2 = 9$.

В обоих случаях вероятность вынуть два черных шара равна

$$\left(1 - \frac{k_1}{n_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{k_2}{n_2}\right) = 0,04.$$

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованно получен правильный ответ.
10	В решении рассмотрены не все возможные из случаев распределения шаров по корзинам или нет обоснования того, что все возможные случаи рассмотрены.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий.