

Вариант - 4

1. (15 баллов) Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{|x + 2|} \right) (x^2 + 2x + 2 + |x + 2|) \leq \sqrt{15 - 2x - x^2}$$

2. (15 баллов) В трапеции $ABCD$ точки K, N, M принадлежат отрезку BC , $BK = KN = NM = MC = 1$, а точки L, O, P, Q принадлежат отрезку AD , $AL = LO = PO = QP = QD = 3$. Прямые BC и AD параллельны. Точка K соединена с точками A, L, O, P, Q, D . Точка L соединена с точками B, K, N, M, C . Докажите, что точки пересечения прямых BL и AK , KO и LN , KQ и LC лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка этой прямой между боковыми сторонами трапеции.

3. (15 баллов) ООО «Ромашка» выделил 100 тыс. рублей на обновление формы для вахтёров, причём они рассчитывали потратить не более 13,7 тыс. рублей за один комплект. Когда они обратились к производителю, то оказалось, что стоимость одного комплекта меньше предполагаемой на столько рублей, сколько комплектов одежды нужно приобрести, при этом, при покупке нужного количества комплектов формы предприятие получает наименьший остаток от общей суммы выделенных денег. Определите количество комплектов при таких условиях. Какова цена одного комплекта?

4. (15 баллов) Найти все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\text{неравенств } \begin{cases} (x+2)^2 + (a-3)^2 \leq 9 \\ 6-a \geq (x+2)^2 \\ a+x \leq 2 \end{cases} \quad \text{имеет хотя бы одно решение, и указать решения}$$

системы для каждого значения a .

5. (20 баллов) В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол A равен 60° . На стороне CD выбирается точка K так, что $\angle BKC = 30^\circ$, при этом $AD = CD$. Прямая BN пересекает сторону CD в точке N , а отрезки AK и BN пересекаются в точке P . Найдите величину угла DPB в градусах, если $KN:ND = 2\sin\angle BDC$.

6. (20 баллов) Ксюша, Ваня и Вася решили пойти в кино. Они договорились встретиться на автобусной остановке, но не знают, кто во сколько придёт. Каждый из них может прийти в случайный момент времени с 14.00 до 15.00. Вася самый терпеливый: если он придёт и на остановке не будет ни Ксюши, ни Вани, то он будет ждать кого-нибудь из них 20 минут, и если никого не дождётся, то пойдёт в кино

один. Ваня менее терпеливый: он будет ждать лишь 10 минут. Ксюша самая нетерпеливая: она вообще не будет ждать. Однако если Ваня и Вася встретятся, то они будут ждать Ксюшу до 15.00. Определить вероятность того, что в кино они пойдут все вместе.

Решение. 9 класс. Вариант 4

1. (15 баллов) Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{|x + 2|}\right)(x^2 + 2x + 2 + |x + 2|) \leq \sqrt{15 - 2x - x^2}$$

Решение:

Докажем, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geq 4$.

Раскрыв скобки, получаем: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, учитывая, что числа положительные $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \geq 0$.

Поскольку на ОДЗ уравнения имеем $x^2 + 2x + 2 > 0$, $|x + 2| > 0$, применяя доказанное неравенство получаем, что для любого x левая часть неравенства не меньше 4.

В то же время правая часть неравенства

$$\sqrt{15 - 2x - x^2} = \sqrt{16 - (x + 1)^2} \leq 4.$$

Следовательно, неравенство равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{|x + 2|}\right)(x^2 + 2x + 2 + |x + 2|) = 4 \\ \sqrt{15 - 2x - x^2} = 4 \end{cases}$$

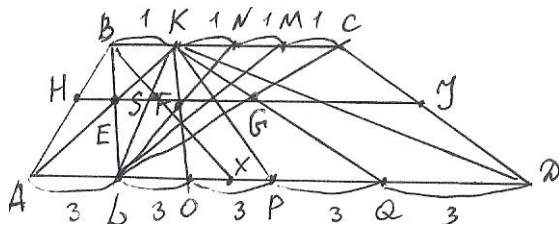
Из второго уравнения находим, что $x = -1$, подставляем в первое уравнение системы, получаем, что $x = -1$ его решение, следовательно, $x = -1$ решение исходного неравенства.

Ответ: $x = -1$.

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки
10	Верно выполнены оценки обеих частей неравенства и/или задача сведена к равносильной системе уравнений
5	Верно выполнена оценка одной части неравенства
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

2.(15 баллов) В трапеции ABCD точки K,N,M принадлежат отрезку BC, BK=KN=NM=MC=1, а точки L,O,P,Q принадлежат отрезку AD, AL=LO=PO=QR=QD=3. Прямые BC и AD параллельны. Точка K соединена с точками A,L,O,P,Q,D. Точка L соединена с точками B,K,N,M,C. Докажите, что точки пересечения прямых BL и AK, KO и LN, KQ и LC лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка этой прямой между боковыми сторонами трапеции.

Решение.



1) Пусть $BL \cap AK = E$, $KO \cap LN = F$, $KQ \cap LC = G$;

$$2) \triangle BEK \sim \triangle AEL, \frac{KE}{EA} = \frac{1}{3}$$

$$3) \triangle KFN \sim \triangle LFO, \frac{KE}{EA} = \frac{1}{3}$$

$$4) \triangle EFK \sim \triangle AOK, EF \parallel AO$$

$$5) \triangle KGC \sim \triangle LGQ, \frac{KG}{GQ} = \frac{1}{3} \Rightarrow \triangle FKG \sim \triangle OKQ, FG \parallel OQ$$

6) $EF \parallel AD$, $FG \parallel AD$, следовательно точки E,F,G лежат на одной прямой, параллельной AD;

7) пусть $(EF) \cap (AB) = H, (EF) \cap (CD) = J$. Тогда по обобщенной

теореме Фалеса $\frac{BH}{HA} = \frac{1}{3} = \frac{CJ}{JD}$;

8) Проведем BX параллельно CD, тогда четырехугольник BXDC по определению параллелограмм. Пусть BX пересекает EF в точке S.

$$SJ = BC = 4, HS = \frac{AX}{4} = \frac{15-4}{4} = \frac{11}{4}, HJ = \frac{11}{4} + 4 = \frac{27}{4} = 6,75$$

Ответ: 6,75

Критерии проверки.

15 б	Полное обоснованное решение.
10 б	Присутствуют доказательство и верный ответ, но есть недостатки в обосновании.
5 б	Присутствует доказательство того, что точки лежат на одной прямой или вычислена длина отрезка.

3.(15 баллов) ООО «Ромашка» выделило 100 тыс. рублей на обновление формы для вахтёров, причём они рассчитывали потратить не более 13,7 тыс. рублей за один комплект. Когда они обратились к производителю, то оказалось, что стоимость одного комплекта меньше предполагаемой на столько рублей, сколько комплектов одежды нужно приобрести, при этом при покупке нужного количества комплектов формы предприятие получает наименьший остаток от общей суммы выделенных денег. Определите количество комплектов при таких условиях. Какова цена одного комплекта?

Решение. Пусть x – количество комплектов одежды, тогда $(13,7-x)$ – стоимость 1 комплекта, значит, $(13,7-x) x$ – стоимость всех комплектов. $(100 - (13,7-x) x)$ – остаток от общей суммы денег.

$$y = 100 - (13,7-x) x = x^2 - 13,7x + 100.$$

$$x_v = 6,85.$$

$$x_1 = 7, y_1 = 100 - (13,7-7) 7 = 100 - 6,7 \cdot 7 = 100 - 46,9 = 53,1.$$

$$x_2 = 6, y_2 = 100 - (13,7-6) 6 = 100 - 7,7 \cdot 6 = 100 - 46,2 = 53,8.$$

Наименьший остаток от общей суммы выделенных денег 53,1 тыс руб. Цена одного комплекта 6,7.

Ответ. а) наименьший остаток от общей суммы выделенных денег 53,1.

б) цена одного комплекта 6,7.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка .
5	Решено подбором значений переменной, удовлетворяющих условию задачи, без обоснования.
2	Наблюдаются отдельные догадки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

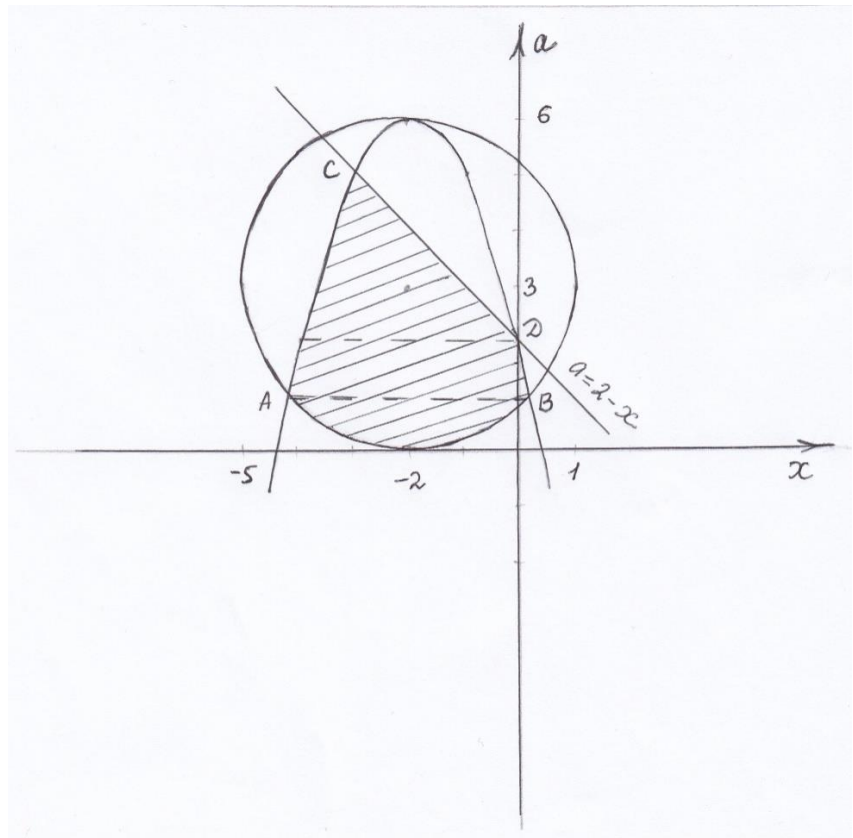
4. (15 баллов) Найти все значения параметра a , при каждом из которых

$$\text{система неравенств } \begin{cases} (x+2)^2 + (a-3)^2 \leq 9 \\ 6-a \geq (x+2)^2 \\ a+x \leq 2 \end{cases} \quad \text{имеет хотя бы одно решение, и}$$

указать решения системы для каждого значения a .

Преобразуем систему к виду $\begin{cases} (x+2)^2 + (a-3)^2 \leq 3^2 \\ a \leq 6 - (x+2)^2 \\ a \leq -x + 2 \end{cases}$ и начертим в одной

системе координат в осях x, a графики ограничивающих искомую область линий: окружности $(x+2)^2 + (a-3)^2 = 3^2$; параболы $a = 6 - (x+2)^2$ и прямой



$a = 2 - x$ (см. график).

Заштрихованная область на рисунке удовлетворяет всем условиям задачи. Найдём значения параметра, при которых графики пересекаются. Прямая и

окружность: $\begin{cases} (x+2)^2 = 6-a \\ (x+2)^2 + (a-3)^2 = 9 \end{cases}; a \leq 6; 6-a+a^2-6a+9=9;$

$a^2 - 7a + 6 = 0; a_1 = 1; a_2 = 6$ (соответствует тому, что вершина параболы лежит

на окружности). Парабола и прямая:
$$\begin{cases} a = 2 - x \\ (x + 2)^2 = 6 - a \end{cases}; x = 2 - a;$$

$(2 - a + 2)^2 = 6 - a; a^2 - 7a + 10 = 0; a_1 = 5; a_2 = 2$. Точка $C(-3; 5)$. Система имеет хотя бы одно решение при $a \in [0; 5]$.

Выразим x через a из уравнений окружности $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{9 - (a - 3)^2}$ и параболы $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{6 - a}$. Запишем ответ по графику.

Ответ: система имеет хотя бы одно решение при $a \in [0; 5]$. $a = 0, x = -2$;

$a \in (0; 1], x \in [-2 - \sqrt{9 - (a - 3)^2}; -2 + \sqrt{9 - (a - 3)^2}]$;

$a \in (1; 2], x \in [-2 - \sqrt{6 - a}; -2 + \sqrt{6 - a}]$; $a \in (2; 5), x \in [-2 - \sqrt{6 - a}; 2 - a]$;

$a = 5, x = -3$.

Критерии оценки

15 баллов	Полное обоснованное решение
13 баллов	Одна – две неправильно поставленные скобки (например, интервал вместо отрезка при выписывании решений) .
10 баллов	Графики построены правильно, ход решения верный. Ответ незначительно отличается от правильного из-за арифметической ошибки при нахождении координат одной из точек пересечения графиков. Или небольшие ошибки (описки) при выписывании решений.
5 баллов	Правильно найдены только значения параметра, при которых система имеет хотя бы одно решение. Сами решения в зависимости от параметра не указаны или указаны неверно.

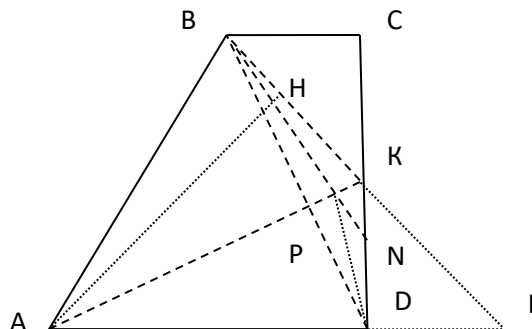
5 (20 баллов) В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол A равен 60° . На стороне CD выбирается точка K так, что $\angle BKC = 30^\circ$, при этом $AD = CD$. Прямая BN пересекает сторону CD в точке N , а отрезки AK и BN пересекаются в точке P . Найдите величину угла DPB в градусах, если $KN:ND = 2\sin\angle BDC$.

Решение. Продолжим BK до пересечения с прямой AD в точке L .

Треугольник ABL – правильный, так как $\angle KBC = 60^\circ \Rightarrow \angle ABL = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$. $\angle BKC = 30^\circ$, $\angle BKD = 150^\circ$ (смежный).

Проведем отрезок $AN \perp BK$, $AN = CD = AD$ (AN и CD – высоты).

Из условия $KN:ND = 2BC:BD$, $KN:ND = BK:BD$, BN – биссектриса $\angle KBD$.



Треугольники $АНК$ и AKD – равны по гипотенузе AK и катетам $АН$ и AD , AK – биссектриса $\angle BKD$, P – точка пересечения биссектрис BN и AK треугольника BKD .

По свойству точки пересечения биссектрис: $\angle DPB = 90^\circ + 0,5 \angle BKD = 90^\circ + 75^\circ = 165^\circ$.

Ответ: 165° .

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
7	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (например, $NL = AC$), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

6. (20 баллов) Ксюша, Ваня и Вася решили пойти в кино. Они договорились встретиться на автобусной остановке, но не знают, кто во сколько придёт. Каждый из них может прийти в случайный момент времени с 14.00 до 15.00. Вася самый терпеливый: если он придёт и на остановке не будет ни Ксюши, ни Вани, то он будет ждать кого-нибудь из них 20 минут, и если никого не дождётся, то пойдет в кино один. Ваня менее терпеливый: он будет ждать лишь 10 минут. Ксюша самая нетерпеливая: она вообще не будет ждать. Однако если Ваня и Вася встретятся, то они будут ждать Ксюшу до 15.00. Определить вероятность того, что в кино они пойдут все вместе.

Ответ: $\frac{31}{216}$.

Решение. Так как Ксюша совсем не будет ждать, то ребята пойдут в кино, только если Ксюша придет последней. Время прихода ребят – независимые события, следовательно,

$$P(\text{все трое пойдут в кино вместе}) = \\ = P(\text{Ксюша придёт последней}) \cdot P(\text{Ваня и Вася встретятся}).$$

Далее,

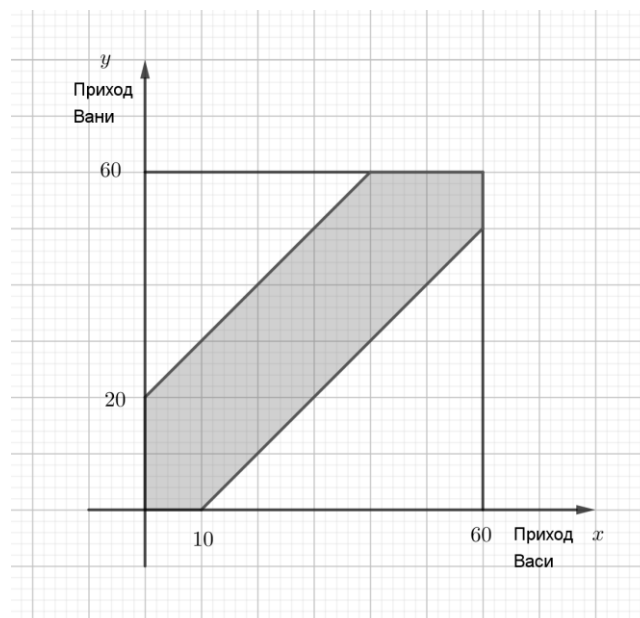
$$P(\text{Ксюша придёт последней}) = \frac{\text{число подходящих вариантов}}{\text{число перестановок из 3 элементов}} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}.$$

Вторая вероятность находится геометрически. Обозначим: x - момент прихода Васи, y - момент прихода Вани, $0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60$. Тогда область

$\begin{cases} y \geq x \\ y - x \leq 20 \end{cases}$ соответствует тому, что первым пришел Вася и он дождался

прихода Вани, а область $\begin{cases} y \leq x \\ x - y \leq 10 \end{cases}$ - тому, что первым пришел Ваня и он

дождался прихода Васи. Таким образом, получаем благоприятную область для события «Ваня и Вася встретятся»:



Следовательно,

$$P(\text{Ваня и Вася встретятся}) = \frac{60^2 - \frac{1}{2} \cdot 40^2 - \frac{1}{2} \cdot 50^2}{60^2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{5}{6} \right)^2 \right) = \frac{31}{72},$$

$$P(\text{все трое пойдут в кино вместе}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{31}{72} = \frac{31}{216}.$$

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованно получен правильный ответ.
10	Построена вероятностная модель, в рамках которой возможно получение правильного ответа (например, в решении задачи используется координатная плоскость для определения геометрической вероятности соответствующих событий).
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий.