

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»
МАТЕМАТИКА (заключительный этап)
2018-2019 учебный год
8 класс

Вариант – 9

1. (15 баллов) При каких значениях параметра k на прямой $y = kx + 4$ есть хотя бы одна точка с равными положительными координатами?

2. (15 баллов) Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} y + x^2 + 1 = 6x \\ \frac{y^2 - 4y - 5}{x - 6} = x \end{cases}$$

3. (15 баллов) В треугольнике MPK MM_1 и KK_1 - высоты треугольника MPK , $MM_1 = 3\sqrt{3}$, $KK_1 = 3\sqrt{2}$, $MK = 6$. Из вершин M и K к прямой M_1K_1 проведены перпендикуляры ME и KH . Найдите длины отрезков EK_1 и M_1H .

4. (15 баллов) Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение, если

$$f(x) = \left| \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{(x - 3)(x + 1) + 3(2x + 2)} \right|$$

$$p(x) = \sqrt{x^2 + 12x + 36} + a$$

5. (20 баллов) Про четыре натуральных числа a, b, c, d известно, что они являются квадратами различных натуральных чисел. Могут ли числа $a^2 - 2cd + b^2$ и $c^2 - 2ab + d^2$ также являться квадратами натуральных чисел?

6. (20 баллов) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M делят сторону BC , а точки N, E, F сторону AD на четыре равные части соответственно. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если площади четырехугольников $ABKN$ и $LMFE$ равны 12 и 24 соответственно.

Решения (8-й класс) Вариант 9

1. При каких значениях параметра k на прямой $y = kx + 4$ есть хотя бы одна точка с равными положительными координатами? (15 баллов)
2. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} y + x^2 + 1 = 6x \\ \frac{y^2 - 4y - 5}{x - 6} = x \end{cases}$$
 (15 баллов)
3. В треугольнике MPK MM_1 и KK_1 - высоты треугольника MPK , $MM_1 = 3\sqrt{3}$, $KK_1 = 3\sqrt{2}$, $MK = 6$. Из вершин M и K к прямой M_1K_1 проведены перпендикуляры ME и KH . Найдите длины отрезков EK_1 и M_1H . (15 баллов)
4. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение.

$$f(x) = \left| \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{(x - 3)(x + 1) + 3(2x + 2)} \right|$$
$$p(x) = \sqrt{x^2 + 12x + 36} + a \text{ (15 баллов)}$$

5. Про четыре натуральных числа a, b, c, d известно, что они являются квадратами различных натуральных чисел. Могут ли числа $a^2 - 2cd + b^2$ и $c^2 - 2ab + d^2$ также являться квадратами натуральных чисел? (20 баллов)
6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M делят сторону BC , а точки N, E, F сторону AD на четыре равные части соответственно. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если площади четырехугольников $ABKN$ и $LMFE$ равны 12 и 24 соответственно. (20 баллов)

№1: Предположим, что такая точка существует и её координаты $(x_0; x_o)$. Тогда должны выполняться следующие условия $x_0 > 0$ и эта точка должна лежать на прямой, то есть её координаты должны удовлетворять уравнению $y = kx + 4$. Выпишем систему условий и решим её.

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_0 = kx_0 + 4 \end{cases}$$

Решая уравнение, получим

$$\begin{cases} k = 1 \\ 0 \cdot x_0 = -4 \\ k \in R \setminus \{1\} \\ x_0 = \frac{-4}{k-1} \end{cases}$$

Откуда из первой системы получаем пустое множество, а из второй получим, что

$$x_0 = \frac{-4}{k-1} \text{ при } k \neq 1. \text{ С учетом условия, что } x_0 > 0, \text{ получим, что } \frac{-4}{k-1} > 0$$

, откуда, с учётом знака знаменателя $k < 1$.

Ответ: $k < 1$

15 баллов	Полностью правильно решенная задача
10 баллов	При решении системы допущена арифметическая ошибка
5 баллов	Верно составлена система условий
0 баллов	Решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям.

№2: Преобразуем второе уравнение:

$$\begin{cases} y^2 - 4y - 5 = x^2 - 6x \\ x - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 \\ x \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 - (x-3)^2 = 0 \\ x \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (y-2-x+3) \cdot (y-2+x-3) = 0 \\ x \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ y = 5 - x \\ x \neq 6 \end{cases} \text{ А теперь – система:}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y = x - 1 \\ x - 1 = -x^2 + 6x - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 5 - x \\ 5 - x = -x^2 + 6x - 1 \\ x \neq 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 5 - x \\ x^2 - 7x + 6 = 0 \\ x \neq 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \end{cases} \\ x \neq 6 \end{cases}$$

Ответ: $\{(0; -1); (5; 4); (1; 4)\}$

№3: Рассмотрим треугольники K_1PM_1 и KPM . $\frac{PM_1}{K_1P} = \frac{MP}{PK}$, $\angle P$ - общий, следовательно, $\Delta K_1PM_1 \sim \Delta KPM$ (по второму признаку). Из подобия треугольников следует, что $\angle PM_1K_1 = \angle PMK$, $\angle PK_1M_1 = \angle PKM$.

$$\sin \angle MKM_1 = \frac{MM_1}{MK} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \angle MKM_1 = 60^\circ; \sin \angle KMK_1 = \frac{K_1K}{MK} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \angle KMK_1 = 45^\circ.$$

$$M_1H = EK_1 = M_1K \cos 60^\circ \cos 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

15 баллов	Полное верное решение.
12 баллов	Решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка или ошибка в значении тригонометрической функции.
10 баллов	Верно найден один из отрезков.
5 баллов	Доказано подобие треугольников K_1PM_1 и KPM , дальнейшее решение отсутствует или неверно.
0 баллов	Решение неверное, например, неверно взято равенство соответствующих углов в подобных треугольниках.

№4: Преобразуем выражение:

$$\frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{(x-3)(x+1) + 3(2x+2)} = \frac{(x+1) \cdot (x^2 - 9)}{x^2 + 4x + 3} = \frac{(x+1)(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+3)}$$

$$f(x) = \left| \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{(x-3)(x+1) + 3(2x+2)} \right| = |x-3|$$

$$D(f): x \neq -1, x \neq -3;$$

$$p(x) = \sqrt{x^2 + 12x + 36} + a = |x + 6| + a$$

получим уравнение: $|x - 3| = |x + 6| + a$

решим его графически системе координат ХОА:

$$\begin{cases} x < -6 \\ -x + 3 = -x - 6 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -6 \\ a = 9 \end{cases}$$

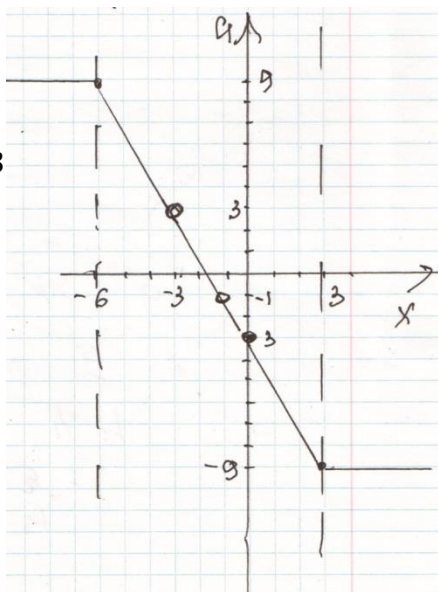
$$\begin{cases} -6 \leq x < 3 \\ -x + 3 = x + 6 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x < 3 \\ a = -2x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x - 3 = x + 6 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ a = -9 \end{cases}$$

Уравнение имеет 1 решение при

$$a \in (-9; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; 9);$$

Ответ: $a \in (-9; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; 9);$



15 баллов	Задание выполнено верно, решение обоснованное.
10 баллов	Приведено упрощение выражений, задающих функции. Составлено уравнение, но при аналитическом решении допущены ошибки в нахождении интервалов для параметра. При графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение и не решено или решено неверно.
0 баллов	В остальных случаях.

№5: Пусть $cd = ab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2cd + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (b - a)^2 \\ c^2 - 2ab + d^2 = c^2 - 2cd + d^2 = (d - c)^2 \end{cases}$

Подберем пример:

$$a=4; b=16; d=64; c=1 \quad (4 \times 16 = 1 \times 64)$$

20 баллов	Верный пример, показано, что он подходит
15 баллов	Верный пример, не показано, что он подходит
5 баллов	Указано, что обычно числа являются квадратами при $ab=cd$, но пример отсутствует или найден не верно
0 баллов	Решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям.

№6: $S_{ABCD} = 12 + 18 + 24 + 30 = 84.$

20 баллов	Верное обоснованное решение
15 баллов	При верном ходе решения допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Верно найдена трапеция и найдена в ней средняя линия, дальнейшее решение отсутствует или неверное.
5 баллов	Получено верное, но необоснованное решение.
0 баллов	Решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям.

