

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»
МАТЕМАТИКА (заключительный этап)
2018-2019 учебный год
8 класс

Вариант - 7

- 1. (15 баллов)** Каково расстояние между точками a и b на числовой оси, если про них известно, что $a + b = \sqrt{2019}$ и $ab = 248,75$.
- 2. (15 баллов)** Найдите значения переменных x и y , при которых выполняется равенство:
$$\left(\frac{y^2 + 6y - 4x - 7}{4x^2 + 12x} - 1\right)^2 + (x^2 + 4x - y - 2)^2 = 0.$$
- 3. (15 баллов)** Площадь квадрата $ABCD$ равна 100. Точки K и L середины сторон AD и CD соответственно. Отрезки BK и AL пересекаются в точке M . Найти площадь четырехугольника $KMLD$.
- 4. (15 баллов)** При каких значениях параметра a уравнение $f(x) = p(x)$, где
$$f(x) = \left| \frac{x^2 - 6x + 9}{3 - x} + \frac{4x^2 - 5x}{x} \right|, \quad p(x) = |x + a|,$$
 имеет одно решение?
- 5. (20 баллов)** В параллелограмме $ABCD$ M – середина стороны BC , N – середина стороны CD . Известно, что $DM \perp AC$. Найдите отрезок BN , если сторона $CD = 6$.
- 6. (20 баллов)** Известно, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.
 $35! = 10333147966386\mathbf{CD}4929666651337523\mathbf{AB}0000000.$
Найти A, B, C, D .

Решение. 8 класс. Вариант 7.

1. Каково расстояние между точками a и b на числовой оси, если про них известно, что $a + b = \sqrt{2019}$ и $ab = 248,75$.

2. Найдите значения переменных x и y , при которых выполняется

равенство:
$$\left(\frac{y^2 + 6y - 4x - 7}{4x^2 + 12x} - 1\right)^2 + (x^2 + 4x - y - 2)^2 = 0.$$

3. Площадь квадрата $ABCD$ равна 100. Точки K и L середины сторон AD и CD соответственно. Отрезки BK и AL пересекаются в точке M . Найти площадь четырехугольника $KMLD$.

4. При каких значениях параметра a уравнение $f(x) = p(x)$, где

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - 6x + 9}{3 - x} + \frac{4x^2 - 5x}{x} \right|,$$

$$p(x) = |x + a|$$
 имеет одно решение?

5. В параллелограмме $ABCD$ M – середина стороны BC , N – середина стороны CD . Известно, что $DM \perp AC$. Найдите отрезок BN , если сторона $CD=6$.

6. Известно, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

$$35! = 10333147966386\mathbf{CD}4929666651337523\mathbf{AB}0000000$$

Найти A, B, C, D .

1. Согласно теореме обратной теореме Виета составим квадратное уравнение.

Получим $x^2 - \sqrt{2019}x + 248,75 = 0$.

Далее, решая его, найдём корни a и b $a = \frac{\sqrt{2019}}{2} + \frac{32}{2}$ и $b = \frac{\sqrt{2019}}{2} - \frac{32}{2}$, а,

следовательно, расстояние между точками a и b $a - b = 32$.

Ответ: 32

15 баллов	Обоснованно получен верный ответ
10 баллов	Квадратное уравнение решено, но при этом допущена арифметическая ошибка или не найдено расстояние между точками
5 баллов	Правильно по условию задачи составлено квадратное уравнение.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

2. Данное уравнение эквивалентно системе уравнений:
$$\begin{cases} \frac{y^2 + 6y - 4x - 7}{4x^2 + 12x} - 1 = 0 \\ x^2 + 4x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2 + 6y - 4x - 7 - 4x^2 - 12x}{4x \cdot (x + 3)} = 0 \\ y = x^2 + 4x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 + 6y + 9 - 9 - 4x^2 - 16x - 16 + 16 - 7 = 0 \\ x \neq -3 \\ x \neq 0 \\ y = x^2 + 4x - 2 \end{cases} \quad . \text{ Преобразуем первое}$$

уравнение: $(y + 3)^2 - (2x + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow (y + 3 - 2x - 4) \cdot (y + 3 + 2x + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -2x - 7 \end{cases}$$

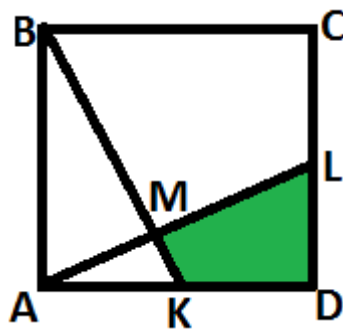
$$\text{Вернёмся к системе: } \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} y = 2x + 1 \\ 2x + 1 = x^2 + 4x - 2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} y = -2x - 7 \\ -2x - 7 = x^2 + 4x - 2 \end{array} \right. \\ x \neq -3 \\ x \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} y = 2x + 1 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} y = -2x - 7 \\ x^2 + 6x + 5 = 0 \end{array} \right. \\ x \neq -3 \\ x \neq 0 \end{array} \right. .$$

Решением системы являются пары $(1; 3), (-5; 3); (-1; -5)$.

Ответ: $\{(1; 3), (-5; 3); (-1; -5)\}$

Баллы	Условия выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	Полностью решены все системы, но из ответа не исключено решение, не входящее в ОДЗ.
8	Первое уравнение верно преобразовано в два линейных уравнения, получены две системы, одна из которых решена верно (включая ОДЗ), а вторая – неверно из-за арифметической или алгебраической ошибки.
5	Первое уравнение верно преобразовано в два линейных уравнения, далее ни одна из двух получившихся систем не была доведена до верного ответа.
0	Решение не удовлетворяет ни одному из вышеперечисленных условий

3. Решение: $\triangle ABK = \triangle DAL$ по 2-м катетам, следовательно $BK \perp AL$. По теореме Пифагора $BK = 5\sqrt{5}$. $\cos \angle ABK = \frac{AB}{BK} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. С другой стороны, в $\triangle ABM$ $BM = AB \cdot \cos \angle ABK = 4\sqrt{5}$.



Значит, $BM:MK = 4:1$. Тогда $\frac{S_{ABK}}{S_{AMK}} = \frac{BK}{MK} = 5$.

Следовательно, $S_{MKLD} = S_{ABK} - S_{AMK} = \frac{4}{5}S_{ABK} = 20$.

Ответ: 20.

15 баллов	Верное обоснованное решение
12 баллов	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка.

10 баллов	Верно найдено отношение отрезков BM и MK .
5 баллов	Доказана перпендикулярность BK и AL
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

4. Преобразуем выражение $\left| \frac{x^2-6x+9}{3-x} + \frac{4x^2-5x}{x} \right| = \left| \frac{(3-x)^2}{3-x} + \frac{x(4x-5)}{x} \right| = |3x-2|$,

получим $f(x)=|3x-2|$, $D(f): x \neq 3, x \neq 0$.

Решим уравнение $|3x-2| = |x+a|$ графически в системе xOa

$$(3x-2)^2 = (x+a)^2$$

$$(3x-2+x+a)(3x-2-x-a) = 0$$

$$\begin{cases} 4x-2+a=0 \\ 2x-2-a=0 \end{cases}$$

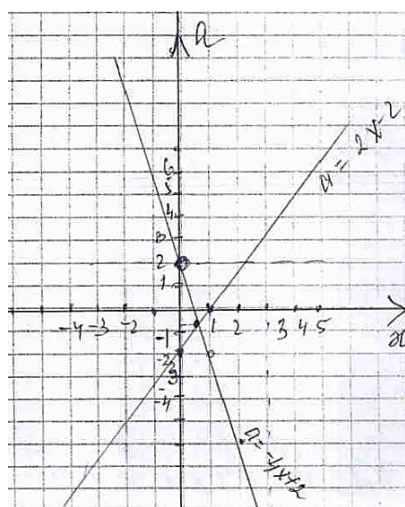
$$\begin{cases} a = -4x+2 \\ a = 2x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -4x+2 \\ a = 2x-2 \end{cases}$$

Уравнение $f(x) = p(x)$ имеет

решение, если $a = -10$;

Ответ: $a = -\frac{2}{3}$; $a = 2$.



ровно одно

15 баллов	Верное обоснованное решение
12 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при его аналитическом решении допущена вычислительная ошибка, не связанная с областью определения функции.
10 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение, но оно не решено или решено неверно.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

5. Проведем диагонали параллелограмма AC и BD . Пусть они пересекаются в точке O . Тогда CO , BN , DM – медианы треугольника BCD . Пусть они пересекаются в точке K . По свойству медиан $BK:KN=2:1$. Так как $DM \perp AC$, то треугольник $СКD$ - прямоугольный. KN его медиана, проведенная к гипотенузе. Значит, $KN=1/2CD$. Тогда $BN:CD=3:2$. Значит, $BN=1,5CD=9$.

Ответ: 9.

20 баллов	Обоснованно получен верный ответ
15 баллов	Решение верно, но допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Рассмотрен треугольник BCD и медианы в нем, прямоугольный треугольник, указано свойство медианы, но BN через сторону CD выражена неверно.

5 баллов	Рассмотрен треугольник BCD и медианы в нем, дальнейшее решение отсутствует или неверное.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

6. В выражении содержатся следующие произведения:
 $(2 \cdot 5) \cdot (10) \cdot (12 \cdot 15) \cdot (25 \cdot 4) \cdot (20 \cdot 30) \cdot (35 \cdot 14) \dots \Rightarrow$ т.к. каждое из этих сгруппированных произведений заканчивается на 0, то число будет заканчиваться на 8 нулей
 $\Rightarrow B=0$

Разобьём выражение на следующие произведения:

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = \dots 8$ произведение оканчивается на 8 (без нулей)

$11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 = \dots 4$ произведение оканчивается на 4 (без нулей)

$21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 = \dots 4$ произведение оканчивается на 4 (без нулей)

$31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 = \dots 4$ произведение оканчивается на 4 (без нулей)

$8 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = \dots 2$ произведение оканчивается на 2 $\Rightarrow A=2$

Рассмотрим признаки делимости числа на 11 и на 9:

Сумма цифр на четных позициях:

$$3+1+7+6+3+6+D+9+9+6+6+1+3+5+3=68+D$$

Сумма цифр на нечетных позициях:

$$1+3+3+4+9+6+8+C+4+2+6+6+5+3+7+2+2=71+C$$

По признаку делимости на 11:

$$71+C-68-D : 11, 3+C-D : 11$$

Отсюда $C-D=-3$ или $C-D=8$.

По признаку делимости на 9:

$$68+D+C+71 : 9, 139+D+C : 9$$

Отсюда $D+C=5$ или $D+C=14$.

Составим систему уравнений:
$$\begin{cases} C - D = -3 \\ C + D = 5 \end{cases} \Rightarrow 2C=2 \Rightarrow C=1 \Rightarrow D=4$$

Примечание: если рассматривать остальные случаи, то C либо дробное, либо больше 10, из чего следует, что данное решение является единственным.

Ответ: A=2, B=0, C=1, D=4.

20 баллов	Обоснованно получен верный ответ
15 баллов	Верно найдены три цифры из четырех.
10 баллов	Верно найдены две цифры из четырех.
5 баллов	Верно найдена одна цифра из четырех.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше