Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Олимпиада школьников «Шаг в будущее»

МАТЕМАТИКА (заключительный этап)

2018-2019 учебный год

8 класс

Вариант - 5

1. *(15 баллов)* При каких значениях параметра k на прямой $y=kx-3$ есть хотя бы одна точка с равными положительными координатами?

2. *(15 баллов)* Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{y^2-6y+5}{x+4}=x \\ y=x^2+4x+1 \end{cases}.$

3. *(15 баллов)* В треугольнике *MPK* *MK*=4, $\angle PMK = 60°$, $\angle PKM = 45°$. MM_1 и KK_1 - высоты треугольника *MPK*. Из вершин *M* и *K* к прямой M_1K_1 проведены перпендикуляры *ME* и *KH*. Найдите длины отрезков EK_1 и M_1H.

4. *(15 баллов)* Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x)=p(x)$ имеет одно решение, если

$$f(x)=\left|\frac{x^3-x^2-16x+16}{(x-2)(x+3)+2(x+1)}\right|$$
$$p(x)=\sqrt{x^2+10x+25}+a$$

5. *(20 баллов)* Про четыре натуральных числа a , b , c , d известно, что они являются квадратами различных натуральных чисел. Могут ли числа $a^2+2cd+b^2$ и $c^2+2ab+d^2$ также являться квадратами натуральных чисел?

6. *(20 баллов)* В выпуклом четырехугольнике *ABCD* точки K, L, M делят сторону *BC* , а точки N, E, F сторону *AD* на четыре равные части соответственно. Найти площади четырехугольников *ABKN* и *LMFE* , если площади четырехугольников *KLEN* и *FMCD* равны 12 и 24 соответственно.

Решения (8-й класс) Вариант 5

1. При каких значениях параметра k на прямой $y = kx - 3$ есть хотя бы одна точка с равными положительными координатами?(15 баллов)
2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{y^2 - 6y + 5}{x+4} = x \\ y = x^2 + 4x + 1 \end{cases}$.(15 баллов)
3. В треугольнике *МРК МК*=4, $\angle PMK = 60°, \angle PKM = 45°$. MM_1 *и* KK_1 - высоты треугольника *МРК*. Из вершин *М* и *К* к прямой M_1K_1 проведены перпендикуляры *МЕ* и *КН*. Найдите длины отрезков EK_1 *и* M_1H.(15 баллов)
4. Найдите, при каких значениях параметра *а* уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение.

$$f(x) = \left|\frac{x^3 - x^2 - 16x + 16}{(x-2)(x+3) + 2(x+1)}\right|$$
$$p(x) = \sqrt{x^2 + 10x + 25} + a$$

   (15 баллов)
5. Про четыре натуральных числа *a, b, c, d* известно, что они являются квадратами различных натуральных чисел. Могут ли числа $a^2 + 2cd + b^2$и $c^2 + 2ab + d^2$ также являться квадратами натуральных чисел?(20 баллов)
6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M делят сторону BC, а точки N, E, F сторону AD на четыре равные части соответственно. Найти площади четырехугольников $ABKN$ и $LMFE$, если площади четырехугольников $KLEN$ и $FMCD$ равны 12 и 24 соответственно. (20 баллов)

Решения.

Вариант 5.

1. Предположим, что такая точка существует и её координаты $\left(x_0; x_o\right)$. Тогда должны выполняться следующие условия $x_0 > 0$ и эта точка должна лежать на прямой, то есть её координаты должны удовлетворять уравнению $y = kx - 3$. Выпишем систему условий и решим её.

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_0 = kx_0 - 3 \end{cases}$$

Решая уравнение, получим

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = 1 \\ 0 \cdot x_0 = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} k \in R \setminus \{1\} \\ x_0 = \dfrac{3}{k-1} \end{cases} \end{array}\right.$$

Откуда из первой системы получаем пустое множество, а из второй получим, что $x_0 = \dfrac{3}{k-1}$ при k не равном 1. С учетом условия, что $x_0 > 0$, получим, что $\dfrac{3}{k-1} > 0$, откуда , с учётом знака знаменателя $k > 1$.

Ответ: $k > 1$

15 баллов	Полностью правильно решенная задача
10 баллов	При решении системы допущена арифметическая ошибка
5 баллов	Верно составлена система условий
0 баллов	Решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям.

2. Преобразуем первое уравнение:

$$\begin{cases} y^2 - 6y + 5 = x^2 + 4x \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 6y + 9 = x^2 + 4x + 4 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (y-3)^2 - (x+2)^2 = 0 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 3 - x - 2) \cdot (\mathrm{y} - 3 + \mathrm{x} + 2) = 0 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}y=x+5\\ y=x-1\end{array}\right.\\ x\neq -4\end{array}\right.$$ А теперь – система: $$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}y=x+5\\ x+5=x^2+4x+1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}y=1-x\\ 1-x=x^2+4x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\\ x\neq -4\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}y=x+5\\ x^2+3x-4=0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}y=1-x\\ x^2+5x=0\end{array}\right.\end{array}\right.\\ x\neq -4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=6\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=-4\\ y=1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=-5\\ y=6\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=1\end{array}\right.\end{array}\right.\\ x\neq -4\end{array}\right.$$

Ответ: $\{(-5;6);(0;1);(1;6)\}$

3. Рассмотрим треугольники K_1PM_1 и KPM. $\frac{PM_1}{K_1P}=\frac{MP}{PK}$, $\angle P$- общий, следовательно, $\Delta K_1PM_1\sim\Delta KPM$ (по второму признаку). Из подобия треугольников следует, что $\angle PM_1K_1=\angle PMK, \angle PK_1M_1=\angle PKM$.
$M_1K=MK\cos 45°$, $M_1H=M_1K\cos 60°=\sqrt{2}$.
$MK_1=MK\cos 60°$, $EK_1=MK_1\cos 45°=\sqrt{2}$.

15 баллов	Полное верное решение.
12 баллов	Решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка или ошибка в значении тригонометрической функции.
10 баллов	Верно найден один из отрезков.
5 баллов	Доказано подобие треугольников K_1PM_1 и KPM, дальнейшее решение отсутствует или неверно.
0 баллов	Решение неверное, например, неверно взято равенство соответствующих углов в подобных треугольниках.

4. Преобразуем выражение:

$$\frac{x^3-x^2-16x+16}{(x-2)(x+3)+2(x+1)}=\frac{(x-1)*(x^2-16)}{x^2+3x-4}=\frac{(x+4)(x-4)(x-1)}{(x+4)(x-1)}$$

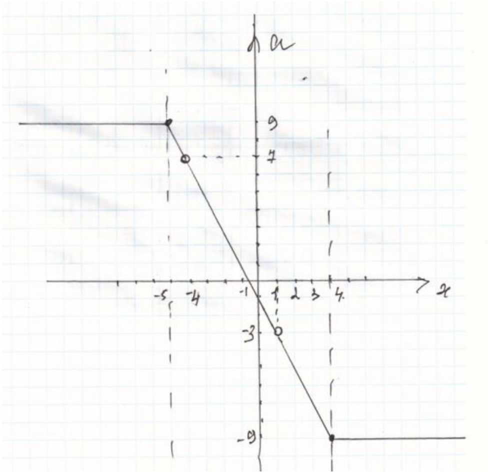
$$f(x)=\left|\frac{x^3-x^2-16x+16}{(x-2)(x+3)+2(x+1)}\right|=|x-4|$$

$$D(f): x\neq -4, x\neq 1;$$

$p(x) = \sqrt{x^2 + 10x + 25} + a = |x+5| + a,$

получим уравнение: $\boxed{|x-4| = |x+5| + a}$

решим его графически системе координат ХОА:



$$\begin{cases} x < -5 \\ a = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 \le x < 4 \\ a = -2x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 4 \\ a = -9 \end{cases}$$

Уравнение имеет 1 решение при

$$a \in (-9; -3) \cup (-3; 7) \cup (7; 9);$$

Ответ: $\boldsymbol{a \in (-9; -3) \cup (-3; 7) \cup (7; 9)}$.

15 баллов	Задание выполнено верно, решение обоснованное.
10 баллов	Приведено упрощение выражений, задающих функции. Составлено уравнение, но при аналитическом решении допущены ошибки в нахождении интервалов для параметра. При графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение и не решено или решено неверно.
0 баллов	В остальных случаях.

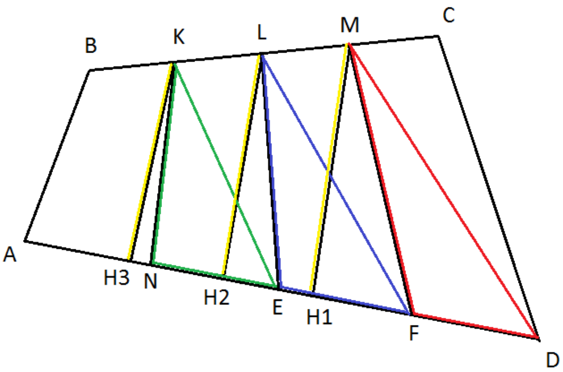
5. Пусть $cd = ab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2cd + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \\ c^2 + 2ab + d^2 = c^2 + 2cd + d^2 = (c+d)^2 \end{cases}$

   Подберем пример:

   a=4; b=16; d=64; c=1 (4x16=1x64)

20 баллов	Верный пример, показано, что он подходит
15 баллов	Верный пример, не показано, что он подходит
5 баллов	Указано, что обычно числа являются квадратами при ab=cd, но пример отсутствует или найден не верно
0 баллов	Решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям.

6. Сделаем дополнительное построение. В треугольниках DMF, FLE, EKN проведем высоты MH_1, LH_2, KH_3 , которые образуют трапецию KMH_1H_3. LH_2 в этой трапеции является средней линией.



Следовательно $S_{\triangle ELF} = \dfrac{S_{\triangle DMF} + S_{\triangle EKN}}{2}$, аналогично $S_{\triangle MLF} = \dfrac{S_{\triangle MCD} + S_{\triangle KLE}}{2}$, откуда $S_{\square LMFE} = \dfrac{S_{\square NKLE} + S_{\square MCDF}}{2} = \dfrac{12+24}{2} = 18$. Проводя аналогичные рассуждения, получаем: $S_{\square ABKN} = 2S_{\square NKLE} - S_{\square LMFE} = 2 \cdot 12 - 18 = 6$

Ответ: 6,18.

20 баллов	Верное обоснованное решение
15 баллов	При верном ходе решения допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Верно найдена трапеция и найдена в ней средняя линия, дальнейшее решение отсутствует или неверное.
5 баллов	Получено верное, но необоснованное решение.
0 баллов	Решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям.