Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Олимпиада школьников «Шаг в будущее»

МАТЕМАТИКА (заключительный этап)

2018-2019 учебный год

8 класс

Вариант - 4

1. **(15 баллов)** При каких значениях m системе уравнений

$$\begin{cases} 8x+y=14m \\ \dfrac{1}{m}x+2y=6 \end{cases}$$

удовлетворяет пара противоположных друг другу чисел? Для каждого такого m найдите решение системы.

2. **(15 баллов)** Решите систему уравнений: $\begin{cases} y^2+x^2+2x=2xy+2y+3 \\ \dfrac{y-x+1}{x}=x-3 \end{cases}$

3. **(15 баллов)** Произвольная точка M, лежащая внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$, соединена с его вершинами. Площади трех из шести образовавшихся треугольников AMB, CMD и MFE равны 6, 10 и 20 соответственно. Найти площади оставшихся треугольников.

4. **(15 баллов)** Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x)=p(x)$ имеет одно решение, если

$$f(x)=\left|\frac{x^3+4x^2-x-4}{(x-3)(x+2)+2(2x+1)}\right|,$$

$$p(x)=\sqrt{x^2-4x+4}+a .$$

5. **(20 баллов)** На стороне BC треугольника ABC выбрана точка K. Через вершину C и середину M отрезка AK проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке N так, что $AM^2=CM\cdot MN$. Найдите $\angle BNK$, если $\angle ABC=72°, \angle BAC=55°$.

6. **(20 баллов)** Ученик записал на доске целое число. Затем он в уме умножил его на 4/3, прибавил к результату 4/3 и записал ответ на доске. Потом он повторил эти два действия со вторым числом и записал на доске результат. Те же операции он выполнил с третьим, четвёртым и пятым числами. Могли ли все шесть чисел получиться целыми? Ответ обоснуйте.

Решение. 8 класс. Вариант 4

1. При каких значениях m системе уравнений
$$\begin{cases} 8x + y = 14m \\ \dfrac{1}{m}x + 2y = 6 \end{cases}$$
удовлетворяет пара противоположных друг другу чисел? Для каждого такого m найдите решение системы.(15 баллов)
2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y^2 + x^2 + 2x = 2xy + 2y + 3 \\ \dfrac{y - x + 1}{x} = x - 3 \end{cases}$ (15 баллов)
3. Произвольная точка M, лежащая внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$, соединена с его вершинами. Площади трех из шести образовавшихся треугольников AMB, CMD и MFE равны 6, 10 и 20 соответственно. Найти площади оставшихся треугольников.(15 баллов)
4. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение.
$$f(x) = \left|\frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{(x-3)(x+2) + 2(2x+1)}\right|$$
$$p(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + a$$ (15 баллов)
5. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка K. Через вершину C и середину M отрезка AK проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке N так, что $AM^2 = CM \cdot MN$. Найдите $\angle BNK$, если $\angle ABC = 72°, \angle BAC = 55°$.(20 баллов)
6. Ученик записал на доске целое число. Затем он в уме умножил его на 4/3, прибавил к результату 4/3 и записал ответ на доске. Потом он повторил эти два действия со вторым числом и записал на доске результат. Те же операции он выполнил с третьим, четвёртым и пятым числами. Могли ли все шесть чисел получиться целыми? Ответ обоснуйте.(20 баллов)

1. Заметим, что при $m=0$, система не определена. Пусть решение системы имеет вид $(x_0; x_0)$. Тогда получим $\begin{cases} 8x_0 - x_0 = 14m \\ \frac{1}{m}x_0 - 2x_0 = 6 \end{cases}$, то есть $\begin{cases} 7x_0 = 14m \\ \frac{1-2m}{m} \cdot x_0 = 6 \end{cases}$, откуда $x_0 = 2m$. Преобразуем подстановкой второе уравнение системы. Получим $\frac{1-2m}{m} \cdot 2m = 6$. Решая уравнение с ограничением m не равно 0, получим что $m=-1$. При этом решением системы будет точка $(-2;2)$

Ответ: при $m=-1$ решение системы $(-2;2)$.

Баллы	**Условия выставления**
15 баллов	Полностью правильно решенная задача
10 баллов	Верно найдено значение параметра, но допущена ошибка при вычислении координат точки – решения системы.
5 баллов	Верно найдена область определения параметра
0 баллов	Во всех остальных случаях

2. Преобразуем первое уравнение: $y^2 - 2xy + x^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-x)^2 - 2(y-x) - 3 = 0 \Leftrightarrow (y-x)^2 + (y-x) - 3(y-x) - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$(y-x)\cdot(y-x+1) - 3\cdot(y-x+1) = 0 \Leftrightarrow (y-x+1)\cdot(y-x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-x=-1 \\ y-x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=x+3 \end{array}\right.$. Преобразуем второе уравнение: $\begin{cases} y-x+1 = x^2-3x \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2-2x-1 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

А теперь решим систему: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1-x+1 = x^2-3x \\ y=x-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+3-x+1 = x^2-3x \\ y=x+3 \end{cases} \end{array}\right. \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-3x=0 \\ y=x-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-3x=4 \\ y=x+3 \end{cases} \end{array}\right. \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases} \end{array}\right. \\ x \neq 0 \end{cases}$.

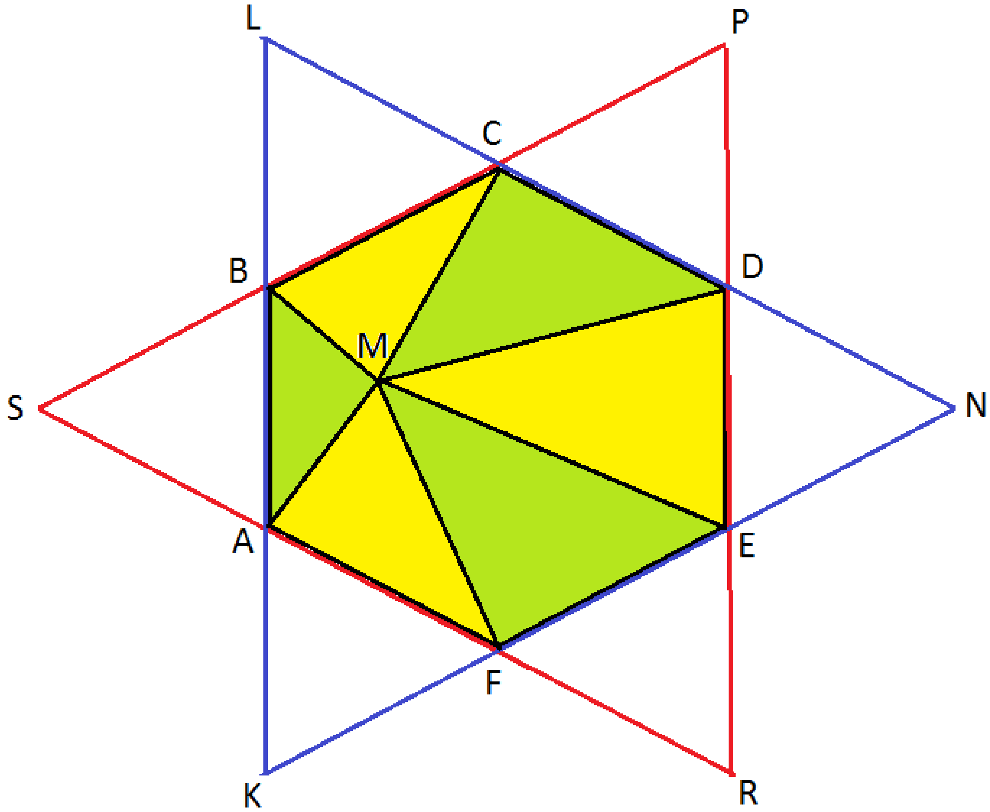
Первая пара не удовлетворяет условию $x \neq 0$.

Ответ: $\{(-1;2);(3;2);(4;7)\}$.

Баллы	Условия выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	Полностью решены все системы, но из ответа не исключено решение, не входящее в ОДЗ.
8	Первое уравнение верно преобразовано в два линейных уравнения, получены две системы, одна из которых решена верно (включая ОДЗ), а вторая – неверно из-за арифметической или алгебраической ошибки.
5	Первое уравнение верно преобразовано в два линейных уравнения, далее ни одна из двух получившихся систем не была доведена до верного ответа.
0	Решение не удовлетворяет ни одному из вышеперечисленных условий

3. Вариант 4. Произвольная точка M, лежащая внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$, соединена с его вершинами. Площади трех из шести образовавшихся треугольников $\triangle AMB$, $\triangle CMD$ и $\triangle MFE$ равны 6, 10 и 20 соответственно. Найти площади оставшихся треугольников.

Ответ: 4, 18, 14.



Решение: Сделаем дополнительное построение: $BC \cap ED = P$; $ED \cap AF = R$; $AF \cap BC = S$; $AB \cap CD = L$; $CD \cap EF = N$; $EF \cap AB = K$. Тогда равносторонний $\triangle KLN = \triangle SRP$. А значит, сумма расстояний от точки M до прямых BC, ED и AF равна сумме расстояний от этой точки до прямых AB, CD и EF, а следовательно и

$S_{\triangle AMB}+S_{\triangle CMD}+S_{\triangle FME}=S_{\triangle BMC}+S_{\triangle DME}+S_{\triangle AMF}=\dfrac{1}{2}S_{ABCDEF}=36$. Кроме того, сумма расстояний от точки M до прямых AB и ED равна сумме расстояний до прямых BC и EF и равна сумме расстояний до прямых CD и AF, а следовательно и

$S_{\triangle ABM}+S_{\triangle EMD}=S_{\triangle BMC}+S_{\triangle EMF}=S_{\triangle CMD}+S_{\triangle AFM}=\dfrac{1}{3}S_{ABCDEF}=2\cdot 36:3=24$.

Значит $S_{\triangle DME}=24-6=18,\ S_{\triangle AMF}=24-10=14,\ S_{\triangle BCM}=24-20=4.$

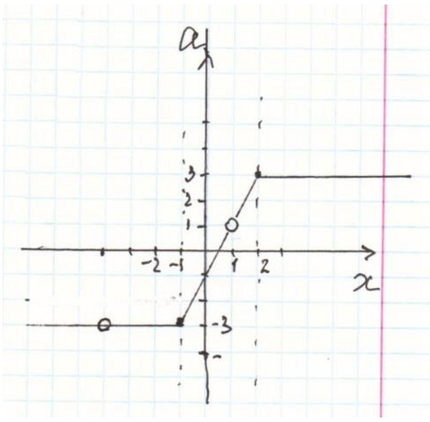
Ответ: 4, 18, 14.

4. Преобразуем выражение:

$$\frac{x^3+4x^2-x-4}{(x-3)(x+2)+2(2x+1)}=\frac{(x+4)*(x^2-1)}{x^2+3x-4}=\frac{(x+4)(x-1)(x+1)}{(x+4)(x-1)}$$

$$f(x)=\left|\frac{x^3+4x^2-x-4}{(x-3)(x+2)+2(2x+1)}\right|=|x+1|$$

$$D(f): x\neq -4, x\neq 1;$$



$p(x)=\sqrt{x^2-4x+4}+a=|x-2|+a,$

получим уравнение: $\boxed{|x+1|=|x-2|+a}$

решим его графически системе координат ХОА:

$$\begin{cases} x<-1 \\ -x-1=-x+2+a \end{cases} <=> \begin{cases} x<-1 \\ a=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1\leq x<2 \\ x+1=-x+2+a \end{cases} <=> \begin{cases} -1\leq x<2 \\ a=2x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 2 \\ x+1=x-2+a \end{cases} <=> \begin{cases} x\geq 2 \\ a=3 \end{cases}$$

Уравнение имеет 1 решение при $a\in(-3;1)\cup(1;3)$.

Ответ: $\boldsymbol{a\in(-3;1)\cup(1;3)}$.

Баллы	Условия выставления
15 баллов	Верное обоснованное решение
12 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при его аналитическом решение решении допущена вычислительная ошибка, не связанная с областью определения функции.
10 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение, но оно не решено или решено неверно.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

5. $AM^2 = CM \cdot MN$ или $\frac{AM}{MN} = \frac{CM}{AM}$, *так как* $AM = MK$, *то* $\frac{AM}{MN} = \frac{CM}{MK}$.
Рассмотрим треугольники AMN и CMK. $\angle AMN = \angle CMK$,
$\frac{AM}{MN} = \frac{CM}{MK}$, следовательно, треугольники подобны по второму признаку. Из подобия следует, что $\angle ANC = \angle CKA$.
Рассмотрим треугольники BNC и BKA. $\angle B$- общий, $\angle BNC = \angle BKA$, как смежные с равными углами, следовательно, $\Delta ABK \sim \Delta CBN$ (по первому признаку). Из подобия треугольников следует, что $\frac{BK}{NB} = \frac{AB}{BC}$.
Рассмотрим треугольники BNK и BCA, $\frac{BK}{NB} = \frac{AB}{BC}$, $\angle B$- общий, следовательно, $\Delta BNK \sim \Delta CBN$ (по второму признаку). Из подобия треугольников следует, что$\angle BNK = \angle BCA$.

$$\angle BCA = 180° - (\angle ABC + \angle BAC) = 180° - (55° + 72°) = 53° = \angle BNK.$$

Ответ: $\boldsymbol{\angle BNK = 53°}$.

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Верное полное решение.
15 баллов	Решение в целом верно, но в последнем пункте допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Доказано подобие треугольников BNC и BKA, дальнейшее решение отсутствует или неверно.
5 баллов	Доказано подобие треугольников AMN и CMK, дальнейшее решение отсутствует или неверно..
0 баллов	Решение неверно, например, неверно взято равенство соответствующих углов в подобных треугольниках.

6. Рассмотрим случай, когда все числа равны. $\frac{4}{3}n + \frac{4}{3} = n$. (Решив это уравнение, получим ответ -4) Если первое число -4, тогда все числа будут равны -4. Так же подойдут все варианты, где первое число равно -4+243n, n ∈Z.
Ответ: могут.

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Приведён верный пример, показано, что все числа будут целыми.
15 баллов	Приведён пример первого числа, но никак не показано, что остальные тоже будут целыми.
5 баллов	Составлено Диофантово уравнение, но не доказано, что оно имеет решение.
0 баллов	Остальные случаи.