Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»
МАТЕМАТИКА (заключительный этап)
2018-2019 учебный год
8 класс

Вариант - 3

1. **(15 баллов)** При каких значениях a системе уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y=15a \\ \dfrac{1}{a}x+y=9 \end{cases}$$

удовлетворяет пара равных чисел? Для каждого такого a найдите решение системы.

2. **(15 баллов)** Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{y-x+1}{x^2-3x}=1 \\ y^2+5+2xy=6y+6x-x^2 \end{cases}$

3. **(15 баллов)** Произвольная точка M, лежащая внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$, площадь которого равна 36, соединена с его вершинами. Площади двух из шести образовавшихся треугольников AMB и CMD равны 3 и 9 соответственно. Найти площади оставшихся четырех треугольников.

4. **(15 баллов)** Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x)=p(x)$ имеет одно решение, если

$$f(x)=\left|\frac{x^3+x^2-4x-4}{(x-1)(x-3)+3x-5}\right|,$$
$$p(x)=\sqrt{x^2}+a.$$

5. **(20 баллов)** На стороне BC треугольника ABC выбрана точка K. Через вершину C и середину M отрезка AK проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке N так, что $AM^2=CM\cdot MN$. Найдите $\angle BKN$, если $\angle ABC=47°, \angle BCA=64°$.

6. **(20 баллов)** Ученик записал на доске целое число. Затем он в уме умножил его на 5/4, прибавил к результату 5/4 и записал ответ на доске. Потом он повторил эти два действия со вторым числом и записал на доске результат. Те же операции он выполнил с третьим, четвёртым и пятым числами. Могли ли все шесть чисел получиться целыми? Ответ обоснуйте.

Решение. 8 класс. Вариант 3

При каких значениях a системе уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y=15a \\ \frac{1}{a}x+y=9 \end{cases}$$

удовлетворяет пара равных чисел? Для каждого такого a найдите решение системы.(15 баллов)

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{y-x+1}{x^2-3x}=1 \\ y^2+5+2xy=6y+6x-x^2 \end{cases}$ (15 баллов)
2. Произвольная точка M , лежащая внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$, площадь которого равна 36, соединена с его вершинами. Площади двух из шести образовавшихся треугольников AMB и CMD равны 3 и 9 соответственно. Найти площади оставшихся четырех треугольников.(15 баллов)
3. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x)=p(x)$ имеет одно решение.

$$f(x)=\left|\frac{x^3+x^2-4x-4}{(x-1)(x-3)+3x-5}\right|$$

$$p(x)=\sqrt{x^2}+a \quad \text{(15 баллов)}$$

4. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка K. Через вершину C и середину M отрезка AK проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке N так, что $AM^2=CM\cdot MN$. Найдите $\angle BKN$, если $\angle ABC=47°, \angle BCA=64°$.(20 баллов)
5. Ученик записал на доске целое число. Затем он в уме умножил его на 5/4, прибавил к результату 5/4 и записал ответ на доске. Потом он повторил эти два действия со вторым числом и записал на доске результат. Те же операции он выполнил с третьим, четвёртым и пятым числами. Могли ли все шесть чисел получиться целыми? Ответ обоснуйте.(20 баллов)

1. Заметим, что при $a=0$, система не определена. Пусть решение системы имеет вид $\left(x_0;x_0\right)$. Тогда получим $\begin{cases}3x_0+2x_0=15a\\ \dfrac{1}{a}x_0+x_0=9\end{cases}$, то есть $\begin{cases}5x_0=15a\\ \dfrac{1+a}{a}\cdot x_0=9\end{cases}$, откуда $x_0=3a$. Преобразуем подстановкой второе уравнение системы. Получим $\dfrac{1+a}{a}\cdot 3a=9$. Решая уравнение с ограничением a не равно 0, получим что $a=2$.

   При этом решением системы будет точка $\left(6;6\right)$

Ответ: при $a=2$ решение системы $\left(6;6\right)$.

Баллы	**Условия выставления**
15 баллов	Полностью правильно решенная задача.
10 баллов	Верно найдено значение параметра, но допущена ошибка при вычислении координат точки – решения системы.
5 баллов	Верно найдена область определения параметра.
0 баллов	Во всех остальных случаях.

2. Преобразуем второе уравнение: $y^2+2xy+x^2-6y-6x+5=0\Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow (y+x)^2-6(y+x)+5=0 \Leftrightarrow (y+x)^2-(y+x)-5(y+x)+5=0\Leftrightarrow$
   $(y+x)\cdot(y+x-1)-5(y+x-1)=0\Leftrightarrow (y+x-1)\cdot(y+x-5)=0\Leftrightarrow$
   $\left[\begin{array}{l}y=1-x\\ y=5-x\end{array}\right.$

   Преобразуем первое уравнение: $\begin{cases}y-x+1=x^2-3x\\ x\neq 0\\ x\neq 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x^2-2x-1\\ x\neq 0\\ x\neq 3\end{cases}$.

Решаем систему: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1-x \\ 1-x=x^2-2x-1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=5-x \\ 5-x=x^2-2x-1 \end{cases} \end{array}\right. \\ x\neq 0 \\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1-x \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=5-x \\ x^2-x-6=0 \end{cases} \end{array}\right. \\ x\neq 0 \\ x\neq 3 \end{cases}$. Получаем

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$. Последняя пара не удовлетворяет условию $x\neq 3$

Ответ: $\{(-1;2);(2;-1);(-2;7)\}$

Баллы	Условия выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	Полностью решены все системы, но из ответа не исключено решение, не входящее в ОДЗ.
8	Второе уравнение верно преобразовано в два линейных уравнения, получены две системы, одна из которых решена верно (включая ОДЗ), а вторая – неверно из-за арифметической или алгебраической ошибки.
5	Второе уравнение верно преобразовано в два линейных уравнения, далее ни одна из двух получившихся систем не была доведена до верного ответа.
0	Решение не удовлетворяет ни одному из вышеперечисленных условий

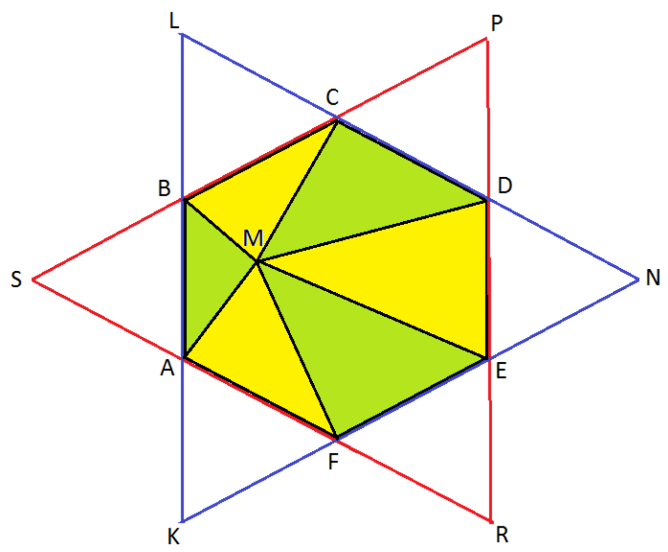
3. Сделаем дополнительное построение: $BC\cap ED=P$; $ED\cap AF=R$; $AF\cap DC=S$; $AB\cap CD=L$; $CD\cap EF=N$; $EF\cap AB=K$. Тогда равносторонний $\Delta KLN=\Delta SRP$. А, значит, сумма расстояний от точки M до прямых BC, ED и AF равна сумме расстояний от этой точки до прямых AB, CD и AF, а следовательно и $S_{\Delta AMB}+S_{\Delta CMD}+S_{\Delta FME}+S_{\Delta BMC}+S_{\Delta DME}+S_{\Delta AME}=\frac{1}{2}S_{ABCDEF}$.

Кроме того, сумма расстояний от точки M до прямых AB и ED равна сумме расстояний до прямых BC и EF и равна сумме расстояний до прямых CD и AF, а, следовательно, и $S_{\Delta AMB} + S_{\Delta EMD} = S_{\Delta BMC} + S_{\Delta MEF} = S_{\Delta CMD} + S_{\Delta AMF} = \frac{1}{3} S_{ABCDEF}$.

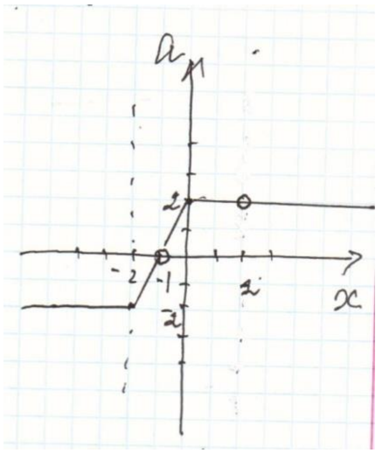
Получаем: $S_{\Delta MFE} = 36:2 - 3 - 9 = 6$, $S_{\Delta BMC} = 36:3 - S_{\Delta MFE} = 6$, $S_{\Delta DME} = 36:3 - S_{\Delta ABM} = 9$ и, аналогично, $S_{\Delta AMF} = 3$.

Ответ: 3, 6, 9, 6.

Баллы	**Условия выставления**
15 баллов	Полное, обоснованное решение
12 баллов	Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Доказано, что расстояние от точки M до прямых AB, CD и EF, равно расстоянию до прямых BC, DE и AF
5 баллов	Доказано, что расстояние от точки M до прямых AB и ED равно расстоянию до прямых BCи EF и равно расстоянию до прямых AF и CD
0 баллов	Решение не соответствует перечисленным выше критериям



4. Преобразуем выражение:



$$\frac{x^3+x^2-4x-4}{(x-1)(x-3)+3x-5}=\frac{(x+1)(x^2-4)}{x^2-x-2}=\frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$f(x)=\left|\frac{x^3+x^2-4x-4}{(x-1)(x-3)+3x-5}\right|=|x+2|$$

$$D(f): x\neq 2, x\neq -1;$$

$p(x)=\sqrt{x^2}+a=|x|+a$, получим уравнение: $\boxed{|x+2|=|x|+a}$

решим его графически системе координат ХОА:

$$\begin{cases} x<-2 \\ -x-2=-x+a \end{cases} <=> \begin{cases} x<-2 \\ a=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\le x<0 \\ x+2=-x+a \end{cases} <=> \begin{cases} -2\le x<0 \\ a=2x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x+2=x+a \end{cases} <=> \begin{cases} x\ge 0 \\ a=2x+2 \end{cases}$$

Уравнение имеет 1 решение при
$a\in(-2;0)\cup(0;2)$;

Ответ: $\boldsymbol{a\in(-2;0)\cup(0;2)}$.

Баллы	**Условия выставления**
15 баллов	Верное обоснованное решение
12 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при его аналитическом решение решении допущена вычислительная ошибка, не связанная с областью определения функции.
10 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение, но оно не решено или решено неверно.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

5. $AM^2=CM\cdot MN$ или $\frac{AM}{MN}=\frac{CM}{AM},$ *так как* $AM=MK,$ *то* $\frac{AM}{MN}=\frac{CM}{MK}$.
Рассмотрим треугольники AMN и CMK. $\angle AMN=\angle CMK,$
$\frac{AM}{MN}=\frac{CM}{MK},$ следовательно, треугольники подобны по второму признаку. Из подобия следует, что $\angle ANC=\angle CKA$.

Рассмотрим треугольники BNC и BKA. $\angle B$- общий, $\angle BNC = \angle BKA$, как смежные с равными углами, следовательно, $\Delta ABK \sim \Delta CBN$ (по первому признаку). Из подобия треугольников следует, что $\frac{BK}{NB} = \frac{AB}{BC}$.

Рассмотрим треугольники BNK и BCA, $\frac{BK}{NB} = \frac{AB}{BC}$, $\angle B$- общий, следовательно, $\Delta BNK \sim \Delta CBN$ (по второму признаку). Из подобия треугольников следует, что$\angle BKN = \angle BAC$.

$$\angle BAC = 180° - (\angle ABC + \angle BCA) = 180° - (47° + 64°) = 69° = \angle BKN.$$

Ответ: $\boldsymbol{\angle BKN = 69°}$.

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Верное полное решение.
15 баллов	Решение в целом верно, но в последнем пункте допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Доказано подобие треугольников BNC и BKA, дальнейшее решение отсутствует или неверно.
5 баллов	Доказано подобие треугольников AMN и CMK, дальнейшее решение отсутствует или неверно..
0 баллов	Решение неверно, например, неверно взято равенство соответствующих углов в подобных треугольниках.

6.Рассмотрим случай, когда все числа равны. $\frac{5}{4}n + \frac{5}{4} = n$(Решив это уравнение, получим ответ -5)Если первое число -5, тогда все числа будут равны -5. Так же подойдут все варианты, где первое число равно -5+1024n, n ∈ Z.

Ответ: могут.

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Приведён верный пример, показано, что все числа будут целыми.
15 баллов	Приведён пример первого числа, но никак не показано, что остальные тоже будут целыми.
5 баллов	Составлено Диофантово уравнение, но не доказано, что оно имеет решение.
0 баллов	Остальные случаи.