

Вариант - 1

1. (15 баллов) При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (m+1)x + 2m - 2 = 0$ будет наименьшей?

2. (15 баллов) Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 2xy + 4 \\ \frac{(y+2) \cdot (x-4)}{x^2 - 6x + 8} = x - 2 \end{cases}$$

3. (15 баллов) В треугольнике ABC $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$. На стороне AB взята точка M так, что $AM = MB$. Найдите $\angle AMC$.

4. (15 баллов) Найдите, при каких значениях a уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение:

$$f(x) = \left| \frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{(x+2)(x+4) - 3x - 12} \right|$$
$$p(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 16} + a$$

5. (20 баллов) У Пети и Маши целое число рублей у каждого. Петя говорит Маше: "Если ты дашь мне 3 рубля, у меня будет в n раз больше рублей, чем у тебя". Маша отвечает: "Если ты дашь мне n рублей, у меня будет в 3 раза больше рублей, чем у тебя".

Какие натуральные значения может принимать n , если ребята говорят правду?

6. (20 баллов) В параллелограмме $ABCD$ точки M, K, L, N лежат на сторонах AB, BC, CD, AD соответственно. $AM : MB = CK : KB = CL : LD = AN : ND = 1 : 3$. Точка O лежит внутри $ABCD$ так, что площади четырехугольников $OKCL$, $OLDN$, $ONAM$ равны 6, 24 и 12 соответственно, то есть $S_{OKCL} = 6$, $S_{OLDN} = 24$, $S_{ONAM} = 12$. Найдите площадь четырехугольника $OMBK$.

Решение. 8 класс. Вариант 1

1. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (m+1)x + 2m - 2 = 0$ будет наименьшей? (15 баллов)

2. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 2xy + 4 \\ \frac{(y+2) \cdot (x-4)}{x^2 - 6x + 8} = x - 2 \end{cases}$$
 (15 баллов)

3. В треугольнике ABC $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$. На стороне AB взята точка M так, что $AM = MB$. Найти $\angle AMC$. (15 баллов)

4. Найдите, при каких a уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение:

$$f(x) = \left| \frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{(x+2)(x+4) - 3x - 12} \right|$$

$$p(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 16} + a$$

(15 баллов)

5. У Пети и Маши целое число рублей у каждого.

Он говорит ей: "Если ты дашь мне 3 рубля, у меня будет в n раз больше рублей, чем у тебя".

Она отвечает: "Если ты дашь мне n рублей, у меня будет в 3 раза больше рублей, чем у тебя".

Какие натуральные значения может принимать n , если ребята говорят правду? (20 баллов)

6. В параллелограмме $ABCD$ точки M, K, L, N лежат на сторонах AB, BC, CD, AD соответственно.

$AM : MB = CK : KB = CL : LD = AN : ND = 1 : 4$. Точка O лежит внутри $ABCD$ так, что площади четырехугольников $OKCL, OLDN, ONAM$ равны 6, 24 и 12 соответственно $S_{OKCL} = 6, S_{OLDN} = 24, S_{ONAM} = 12$.
Найти площадь четырехугольника $OMBK$. (20 баллов)

Решения и критерии.

$$1. \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2, \text{ но, согласно теореме Виета } \begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 + x_2 = -(m+1) \\ x_1x_2 = 2m-2 \end{cases}$$

.Тогда , с учетом того, что $D = (m+3)^2 \geq 0$, имеем $x_1^2 + x_2^2 =$

$$\left(-(m+1)\right)^2 - 2(2m-2) = m^2 + 2m + 1 - 4(m-1) = m^2 - 2m + 5 = (m-1)^2 + 4$$

Откуда $y = (m-1)^2 + 4$ и $y_{\text{наим}} = 4$ при $m = 1$.

Ответ: для уравнения $x^2 + (m+1)x + 2m - 2 = 0$ наименьшая сумма квадратов его корней равна 4 при $m = 1$

Критерии проверки.

15 баллов	Верное обоснованное решение.
10 баллов	С учётом теоремы Виета верно выписано выражение для суммы квадратов корней, но допущена ошибка преобразования выражения
5 баллов	Верно выписана теорема Виета (с учетом D)
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

$$2. \quad \begin{cases} y^2 - 2xy + x^2 = 4 \\ \frac{(y+2) \cdot (x-4)}{(x-2) \cdot (x-4)} = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-x)^2 - 4 = 0 \\ y+2 = (x-2)^2 \\ x \neq 2 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (y-x-2) \cdot (y-x+2) = 0 \\ y+2 = x^2 - 4x + 4 \\ x \neq 2 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 + 2 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \\ \begin{cases} y = x - 2 \\ x - 2 + 2 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \\ x \neq 2 \\ x \neq 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \\ x \neq 2 \\ x \neq 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow . \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \\ x \neq 2 \\ x \neq 4 \end{array} \right.$$

Ответ: $\{(0; 2); (5; 7); (1; -1)\}$.

3. Проведем высоту ВН. $\angle BCH = \angle CBH = 45^\circ$, $\angle ABH = 60^\circ$. Пусть $BH = HC = x$, тогда $BC = x\sqrt{2}$, $AB = 2x$.

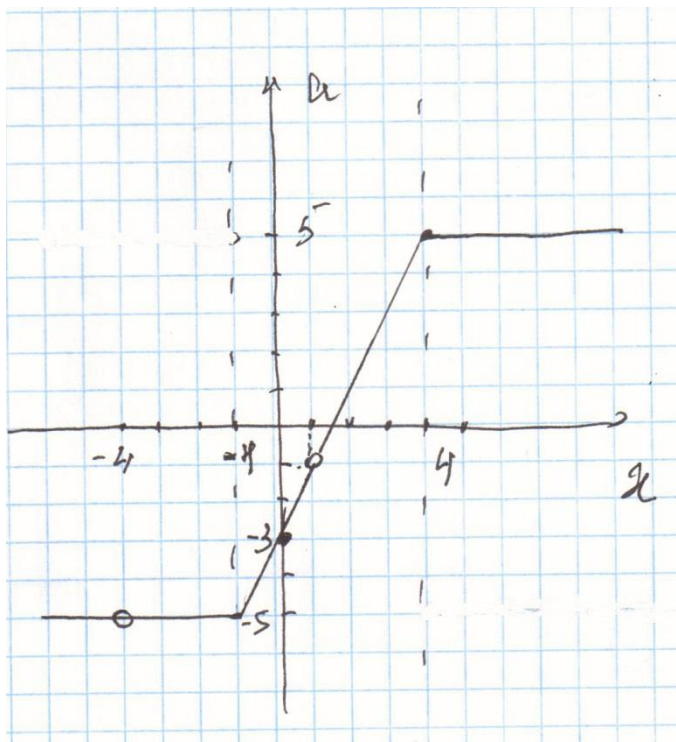
$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{MB} = \sqrt{2}$, $\angle ABC$ – общий. Значит, $\triangle MBC \sim \triangle CBA$ по второму признаку. Из подобия следует, что $\angle BMC = 45^\circ$. Тогда $\angle AMC = 135^\circ$.

Ответ: 135° .

15 баллов	Верное и обоснованное решение.
10 баллов	Проведена высота, правильно выражены стороны, найдены подобные треугольники, в использовании подобия ошибка в соответствующих углах.
5 баллов	Проведена высота, но подобные треугольники не найдены или найдены неверно
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

4. Решение:

Преобразуем выражение:



$$\frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{(x+2)(x+4) - 3x - 12} = \frac{x^2 * (x+4) - (x+4)}{(x+2)(x+4) - 3(x+4)} = \frac{(x+4)(x-1)(x+1)}{(x+4)(x-1)} = x+1$$

$$f(x) = \left| \frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{(x+2)(x+4) - 3x - 12} \right| = |x+1|$$

$$D(f): x \neq -4, x \neq 1;$$

$$p(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 16} + a = |x - 4| + a,$$

получим уравнение: $|x+1| = |x-4| + a$

решим его графически системе координат ХОА:

$$\begin{cases} x < -1 \\ -x - 1 = -x + 4 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ a = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x < 4 \\ x + 1 = -x + 4 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 4 \\ a = 2x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x + 1 = x + 4 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ a = 5 \end{cases}$$

Уравнение имеет 1 решение при

$$a \in (-5; -1) \cup (-1; 5);$$

Ответ: $a \in (-5; -1) \cup (-1; 5);$

15 баллов	Верное обоснованное решение
12 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при его аналитическом решении в решении допущена вычислительная ошибка, не связанная с областью определения функции.

10 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение, но оно не решено или решено неверно.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

5. Решение: Пусть у Маши x рублей, у Пети y рублей, тогда
 $n(x-3)=y+3$
 $x+n=3(y-n)$

Выразим x из второго уравнения и подставим в первое:

$$\begin{aligned} n(3y-4n-3) &= y+3, \\ 3ny-y &= 4n^2+3n+3, \\ y &= (4n^2+3n+3):(3n-1) \end{aligned}$$

чтобы y было целым, $(4n^2+3n+3)$ должно делиться нацело на $(3n-1)$

$$\begin{aligned} (4n^2+3n+3) &:(3n-1) \\ 3(4n^2+3n+3)-4n(3n-1) &:(3n-1) \\ 13n+9 &:(3n-1) \\ 3(13n+9)-13(3n-1) &:(3n-1) \\ 40 &:(3n-1) \end{aligned}$$

$(3n-1)$ является делителем 40 только при $n=1;2;3;7$

Проверим, являются ли x и y натуральными.

$$n=1, y=5, x=11$$

$$n=2, y=5, x=7$$

$$n=3, y=6, x=6$$

$$n=7, y=11, x=5$$

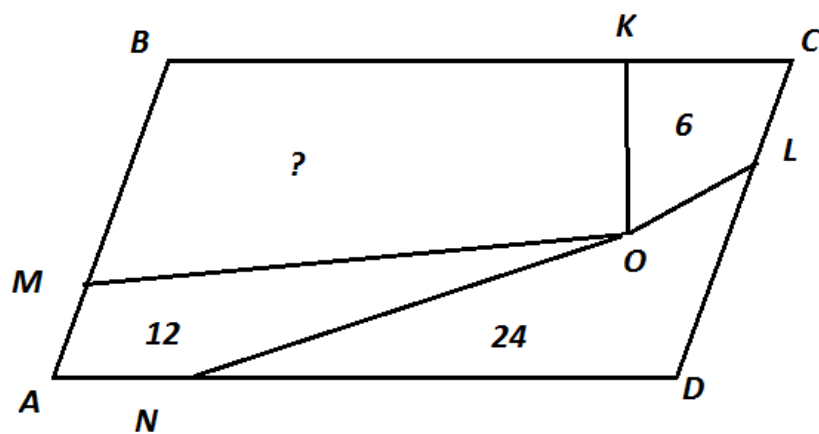
Ответ: 1;2;3;7.

20 баллов	Полное обоснованное решение
15 баллов	Найдены значения n , доказано, что других значений нет, но не показано, почему эти значения соответствуют условию задачи.
12 баллов	Верный ход решения, потеряно одно значение n .
10 баллов	Верный ход решения, есть существенные продвижения, но значения n не найдены или найдены неверно.
5 баллов	Найдены верные решения, но не показано, что других значений n нет.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

6. Решение:

$$S_{\square ABCD} = 4(S_{OKCL} + S_{ONAM}) = 4(6+12) = 72 \Rightarrow S_{OMBK} = 72 - 6 - 24 - 12 = 30$$

Ответ: 30.



20 баллов	Полное обоснованное решение
15 баллов	При правильном ходе решения допущена вычислительная ошибка
10 баллов	Сделано дополнительное построение, проведены отрезки АО и ОС, доказано, что площадь параллелограмма равна сумме площадей четырехугольников. Дальнейшее решение неверно или отсутствует.
5 баллов	Получен верный ответ, но решение не обосновано.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям