

Вариант № 10-2

1. Девочки мелом нарисовали на асфальте 7 прямых, параллельных бордюру. Мальчики пририсовали 5 параллельных между собой прямых, каждая из которых пересекает все прямые, нарисованные девочками. Сколько всего параллелограммов получилось при пересечении этих прямых? (12 баллов)

2. Дан многочлен $P(x) = \frac{1}{16}(4x^5 - x^3 + 1)^3(x^4 - x + 2)$. Найдите все натуральные решения уравнения $Ax + By = 37$, где A – сумма коэффициентов многочлена $P(x)$, стоящих при четных степенях x , B – сумма коэффициентов многочлена $P(x)$, стоящих при нечетных степенях x . (12 баллов)

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 4} - \sqrt{2x^2 + 3x + 5} = \sqrt{3x^2 + 4x + 1} - \sqrt{2x^2 + 5x + 8}. \quad (16 \text{ баллов})$$

4. Решите неравенство

$$\frac{(|5 - x^2| - 4)(9x^2 + \sqrt{9x^2 - 1} - 1)}{(|x - 1| - |7 + x|)\sqrt{x^2 - 2x + 1}} \geq 0. \quad (20 \text{ баллов})$$

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{2 - 2a(1 - x)}{|x| + x} = \sqrt{1 - a + ax}$$

имеет хотя бы одно решение. Укажите эти решения для всякого найденного значения a .

(20 баллов)

6. Окружность с центром O_1 радиуса 2 вписана в треугольник ABC . Вторая окружность с центром O_2 радиуса 4 касается продолжения сторон AB и AC , а также стороны BC . Найдите площадь треугольника O_1BO_2 , если величина угла ACB равна 120° .

(20 баллов)

Вариант № 10-2

1. Девочки мелом нарисовали на асфальте 7 прямых, параллельных бордюру, мальчики пририсовали 5 параллельных между собой прямых, каждая из которых пересекает все прямые, нарисованные девочками. Сколько всего параллелограммов могут образоваться при пересечении этих прямых? (12 баллов)

Решение. $C_7^2 \cdot C_5^2 = \frac{6 \cdot 7}{2} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 210$ **Ответ:** 210

2. Дан многочлен от x : $P(x) = \frac{1}{16}(4x^5 - x^3 + 1)^3(x^4 - x + 2)$. Найти все натуральные решения уравнения $Ax + By = 37$, где A – сумма коэффициентов многочлена $P(x)$, стоящие при четных степенях x . B – сумма коэффициентов многочлена $P(x)$, стоящие при нечетных степенях x . (12 баллов)

Решение. Рассмотрим значения многочлена от 1 и -1.

$P(1) = \frac{1}{16}(4 - 1 + 1)^3(1 - 1 + 2) = 8$, $P(-1) = \frac{1}{16}(-4 + 1 + 1)^3(1 + 1 + 2) = -2$, тогда сумма четных коэффициентов равна $\frac{1}{2}(P(1) + P(-1)) = 3$, а нечетных $\frac{1}{2}(P(1) - P(-1)) = 5$.

Составим требуемое уравнение $3A + 5B = 37$. Сначала найдем какое-либо решение уравнения $3A + 5B = 1$, например, $A = 2$, $B = -1$, домножив на 37 и подключив линейную комбинацию коэффициентов с целыми значениями параметра k , запишем все решения полученного

уравнения: $\begin{cases} x = 74 - 5k, k \in \mathbb{Z}, \\ y = -37 + 3k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ Поскольку требуются натуральные решения, подбираем k

так, чтобы x и y были строго больше 0,
 $\begin{cases} 5k < 74, \\ 3k > 37, \end{cases} \Rightarrow 12 < k \leq 14, \Rightarrow \begin{cases} k = 13, \\ k = 14, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9; y = 2, \\ x = 4; y = 5. \end{cases}$

Ответ: (9; 2) и (4; 5)

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 4} - \sqrt{2x^2 + 3x + 5} = \sqrt{3x^2 + 4x + 1} - \sqrt{2x^2 + 5x + 8}. \quad (16 \text{ баллов})$$

Решение. Перепишем уравнение в более удобном виде:

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 4} - \sqrt{3x^2 + 4x + 1} = \sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 + 5x + 8}.$$

Домножим обе части уравнения и разделим на сопряженные выражения, не равные нулю

$$\frac{2x + 3}{\sqrt{3x^2 + 6x + 4} + \sqrt{3x^2 + 4x + 1}} = \frac{-(2x + 3)}{\sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 + 5x + 8}}.$$

Поскольку знаменатели всегда больше нуля, вынесем числители за скобку.

$$(2x+3)\left(\frac{1}{\sqrt{3x^2+6x+4}+\sqrt{3x^2+4x+1}}+\frac{1}{\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2+5x+8}}\right)=0$$

$$\text{Получаем } \begin{cases} 2x+3=0, \\ 3x^2+4x+1 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3/2, \\ 3(x+1/3)(x+1) \geq 0, \end{cases} \quad \text{Ответ: } -1.5$$

4. Решите неравенство

$$\frac{(|5-x^2|-4)(9x^2+\sqrt{9x^2-1}-1)}{(|x-1|-|7+x|)\sqrt{x^2-2x+1}} \geq 0. \quad (20 \text{ баллов})$$

Решение. Домножим числитель и знаменатель на выражение, знак которого строго больше 0:

$$\frac{(|5-x^2|-4)(|5-x^2|+4)(9x^2+\sqrt{9x^2-1}-1)}{(|x-1|-|7+x|)(|x-1|+|7+x|)\sqrt{x^2-2x+1}} \geq 0.$$

$$\frac{(|5-x^2|^2-16)(9x^2-1+\sqrt{9x^2-1})}{(|x-1|^2-|7+x|^2)|x-1|} \geq 0. \quad \text{Это неравенство равносильно системе}$$

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ 9x^2-1 \geq 0, \\ \frac{(1-x^2)(9-x^2)}{-8(2x+6)} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ \begin{cases} x \geq 1/3, \\ x \leq -1/3, \end{cases} \\ \frac{(1-x)(1+x)(3-x)(3+x)}{(x+3)} \leq 0 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup \{-1/3; 1/3\} \cup (1; 3)$.

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{2-2a(1-x)}{|x|+x} = \sqrt{1-a+ax}$$

имеет хотя бы одно решение. Укажите эти решения для всякого найденного значения a . (20 баллов)

Решение. При $x \leq 0$ решений нет. Рассмотрим $x > 0$. Тогда уравнение переписется в виде

$$\frac{1-a+ax}{x} = \sqrt{1-a+ax} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-a+ax} = 0, \\ \frac{\sqrt{1-a+ax}}{x} = 1. \end{cases}$$

Решая первое уравнение, находим $x = \frac{a-1}{a} > 0 \Rightarrow a \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Рассмотрим

второе уравнение $\frac{\sqrt{1-a+ax}}{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{1-a+ax} = x$, учитывая ограничения, получаем

$$1-a+ax = x^2 \Rightarrow x^2 - ax + a - 1 = 0, D = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2$$

$$\begin{cases} x_1 = a-1 > 0 \Rightarrow a > 1, \\ x_2 = 1 > 0. \end{cases}$$

$$a < 0, \quad x = \frac{-1+a}{a}, \quad x = 1,$$

$$0 \leq a \leq 1, \quad x = 1,$$

Окончательно получаем **ответ:** $1 < a < 2, \quad x = \frac{-1+a}{a}, \quad x = 1, \quad x = -1+a,$

$$a = 2, \quad x = 1, \quad x = 1/2,$$

$$a > 2, \quad x = \frac{-1+a}{a}, \quad x = 1, \quad x = -1+a.$$

6. Окружность с центром O_1 радиуса 2 вписана в треугольник ABC . Вторая окружность с центром O_2 радиуса 4 касается продолжения сторон AB и AC , а также стороны BC . Найдите площадь треугольника O_1BO_2 , если величина угла ACB равна 120° . (20 баллов)

Решение. Т.к. центры окружностей лежат на биссектрисах, а углы ABC и BCA_2 , где A_2 некоторая точка находящаяся на луче AB по разные стороны с точкой A относительно точки B , образуют развернутый угол, то треугольник O_1BO_2 – прямоугольный.

$$CD = \frac{O_1D}{\operatorname{tg} 60} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad EC = \frac{O_2E}{\operatorname{tg} 30} = \frac{4}{1/\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}, \Rightarrow ED = EC - CD = 4\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\triangle O_2EM \sim \triangle O_1DM \Rightarrow EM = 2MD = 2/3ED = 2/3 \cdot 10/\sqrt{3} = 20/(3\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$BM = 2/\sqrt{3} + 20/(3\sqrt{3}) = 26/(3\sqrt{3})$$

$$S = 1/2 \cdot BM \cdot (O_1D + O_2E) = 3BM = 26/\sqrt{3}.$$

Ответ: $26/\sqrt{3}$

