Вариант № 3

1. Из пункта A круговой трассы одновременно и в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл. Автомобиль проехал два круга без остановок в одном направлении. В тот момент, когда автомобиль догнал мотоциклиста, мотоциклист повернул обратно и увеличил скорость на 16 *км/ч*, через 3/8 *ч* после разворота одновременно с автомобилем прибыл в пункт A. Найдите весь путь (в *км*) мотоциклиста, если этот путь на 5,25 *км* короче всего шоссе. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

2. Решите уравнение $\left|2|x-1|-3|x+2|+2|x+4|-|x-2|\right|=x^2+x+4,25$. В ответ запишите сумму корней уравнения. (5 баллов)

3. Найдите наименьшее расстояние от точки с координатами (7; 3; 6) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют неравенству

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right)\geq 9\sqrt{1-(2z+y)^2}.$$

В ответ запишите квадрат найденного расстояния. (6 баллов)

4. Даны 2019 неразличимых по виду монет. Все монеты имеют одинаковую массу, за исключением одной, более легкой. За какое наименьшее число взвешиваний можно гарантированно найти более легкую монету при помощи чашечных весов без гирь?

(12 баллов)

5. Найдите сумму всех чисел вида $x+y$, где x и y являются натуральными решениями уравнения $5x+17y=307$. (12 баллов)

6. Какую наименьшую длину может иметь отрезок AB, если точка A принадлежит кривой $10(x^2+y^2)+60x-80y+249=0$, а точка B — графику функции $y=\frac{1}{3}|x|$? В ответ запишите квадрат найденной длины. (12 баллов)

7. В треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Длина стороны BC равна 6. Расстояния от центра вписанной в треугольник DEF окружности до точек B и C равны $3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ и $2\sqrt{6}$, соответственно. Найдите высоту треугольника DEF, проведенную к стороне DE. (16 баллов)

8. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{|x|-1}, \\ |x+y+a|+|x-y-a|=1. \end{cases}$$

имеет единственное решение. В ответе укажите наименьшее среди всех полученных значение параметра a. (16 баллов)

9. Дана правильная четырехугольная пирамида $TABCD$ с основанием $ABCD$, причем $AB = 9/2$. На ее высоте TO выбрана точка T_1 так, что $TT_1 = TO/3$. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 делят отрезки OA, OB, OC и OD, соответственно, в отношении $1:2$, считая от точки O. Найдите площадь сечения пирамиды $T_1A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной медиане AK боковой грани TAB, проходящей через середину ребра TC и точку F отрезка TA такую, что $AF:FT=1:2$, если известно, что расстояние от точки C до этой плоскости сечения равно $4\sqrt{5/13}$. Результат округлите до сотых по правилам округления. (16 баллов)

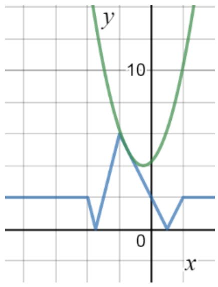
Решения заданий варианта № 3

1. Из пункта *A* круговой трассы одновременно и в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл. Автомобиль проехал два круга без остановок в одном направлении. В тот момент, когда автомобиль догнал мотоциклиста, мотоциклист повернул обратно и увеличил скорость на 16 *км/ч*, через 3/8 *ч* после разворота одновременно с автомобилем прибыл в пункт *A*. Найдите весь путь (в *км*) мотоциклиста, если этот путь на 5,25 *км* короче всего шоссе. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

Решение. Пусть *x (км/ч)* – скорость мотоциклиста, *x (км/ч)* – скорость автомобиля, *S (км)* – путь мотоциклиста до разворота, тогда длина всей трассы $2S+5,25$. Имеем $\frac{S}{x}=\frac{3S+5,25}{y}$, $\frac{3x}{8}+6=S$, $\frac{3y}{8}=S+5,25$. Приходим к квадратному уравнению $4S^2-36S-63=0$, его положительное решение $S=10,5$, весь путь мотоциклиста $2S=21$. Ответ: 21.

2. Решите уравнение $\left|2|x-1|-3|x+2|+2|x+4|-|x-2|\right|=x^2+x+4,25$. В ответ запишите сумму корней уравнения. (5 баллов)

Решение. Если модули раскрываются с одинаковыми знаками, т.е. при $-4\le x$ или $x\ge 2$ левая часть постоянна и равна 2. Максимальные значения будут приниматься на отрезке $-2\le x\le 1$. Минимальное значение функции, стоящей в правой части, достигается в вершине параболы, в точке $x=-1/2$. Раскроем модули при $-2\le x\le 1$



$$|-2x+2-3x-6+2x+8+x-2|=x^2+x+4.25$$
$$2-2x=x^2+x+4.25 \Rightarrow x^2+3x+2.25=0 \Rightarrow x=-1.5$$

Ответ: -1,5.

3. Найдите наименьшее расстояние от точки с координатами (7; 3; 6) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют неравенству

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right)\ge 9\sqrt{1-(2z+y)^2}.$$

В ответ запишите квадрат найденного расстояния. (6 баллов)

Решение. Используем неравенство Коши $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$, которое выполняется для всех положительных значений *a, b, c*. Тогда $x^2+y^2+z^2\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2z^2}}$. Поскольку все части неравенств положительны. то $(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\ge 9\sqrt[3]{x^2y^2z^2\cdot\frac{1}{x^2y^2z^2}}=9.$ Выражение $9\sqrt{1-(2z+y)^2}\le 9$ для всех возможных значений *z* и *y*. Исходное неравенство справедливо для всех положительных *x* и всех положительных *z* и *y*, для которых выполняется неравенство $1-(2z+y)^2\ge 0$. Таким образом, наименьшее расстояние от точки с координатами (7; 3; 6) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют исходному неравенству, равно расстоянию от точки (3; 6) в плоскости *Oyz* до прямой $2z+y=1$. Это расстояние в квадрате равно 39,2. Ответ: 39,2.

4. Даны 2019 неразличимых по виду монет. Все монеты имеют одинаковую массу, за исключением одной, более легкой. За какое наименьшее число взвешиваний можно гарантированно найти более легкую монету при помощи чашечных весов без гирь? (12 баллов)

Решение. Индукцией по k докажем следующее утверждение: если даны N одинаковых по виду монет, причем $3^{k-1} < N \le 3^k$, из которых одна более легкая, то ее можно найти за k взвешиваний. База индукции: $k=0,\ N=1,$ одну монету взвешивать не надо. Шаг индукции: пусть для 0, 1, 2, …, k доказано. Пусть теперь $3^k < N \le 3^{k+1}$. Положим на левую чашу весов не менее $N/3$ монет, но не более 3^k монет, и на правую столько же. Если левая чаша легче, если левая чаша легче, то легкая монета на ней, если правая – то на ней, а если весы уравновешены, то более легкая монета находится среди оставшихся, число которых меньше или равно $N/3 \le 3^k$. В результате, нам останется искать более легкую монету среди не более 3^k монет, и потребуется еще не более k взвешиваний. Поскольку $3^6 < 2019 \le 3^7$, то число взвешиваний k равно 7. Ответ: 7.

5. Найдите сумму всех чисел вида $x+y$, где x и y являются натуральными решениями уравнения $5x+17y=307$. (12 баллов)

Решение. Решаем вспомогательное уравнение $5x+17y=1$. Его решениями, например, могут быть 7 и 2. Домножим их на 307, и учтем линейные комбинации при целом t, получаем значения в натуральных числах

$$\begin{cases} x = 7\cdot 307 - 17t, \\ y = -2\cdot 307 + 5t, \end{cases} t\in Z,\ x>0,\ y>0 \Rightarrow t\in\{123,124,125,126\} \Rightarrow$$

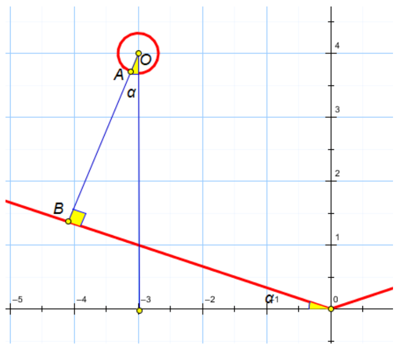
$$(58,1),\ (41,6),\ (24,11),\ (7,16)$$

$$59+47+35+23=164$$

Ответ: 164.

6. Какую наименьшую длину может иметь отрезок AB, если точка A принадлежит кривой $10(x^2+y^2)+60x-80y+249=0$, а точка B — графику функции $y=\frac{1}{3}|x|$? В ответ запишите квадрат найденной длины. (12 баллов)

Решение. Кривая $10(x+3)^2+10(y-4)^2=1$ есть окружность с радиусом $R = 1/\sqrt{10}$ и центром в точке $O(-3;4)$. OB — отрезок перпендикуляра из точки O к прямой $y=-x/3$. Точка A — точка пересечения OB с окружностью. Наименьшая длина и есть длина отрезка AB. Угол α — угол наклона прямой $y = x/3$ к оси x. Тогда $OB = 3\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha = 1/3 \Rightarrow \cos\alpha = 3/\sqrt{10}$. Отсюда $OB = 9/\sqrt{10} \Rightarrow AB = 9/\sqrt{10} - 1/\sqrt{10} = 8/\sqrt{10}$. $AB^2 = 6,4$. Ответ: 6,4.



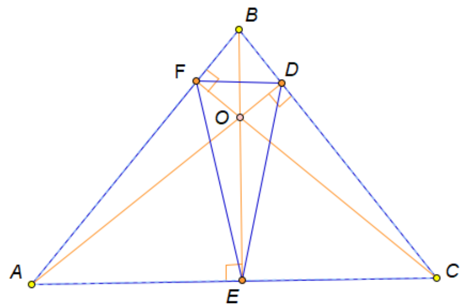
7. В треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Длина стороны BC равна 6. Расстояния от центра вписанной в треугольник DEF окружности до точек B и C равны $3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ и $2\sqrt{6}$, соответственно. Найдите высоту треугольника DEF, проведенную к стороне DE. (16 баллов)

Решение. AD, BE, CF - высоты треугольника ABC, DA, EB, FC биссектрисы углов D, E, F треугольника DEF, O - точка пересечения высот треугольника ABC, она же является центром вписанной в треугольник DEF окружности. Таким образом, $BO = 3\sqrt{2}-\sqrt{6}$, $CO = 2\sqrt{6}$. Пусть $OD = x$, $BD = y$. Тогда приходим к системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (3\sqrt{2}-\sqrt{6})^2, \\ (6-y)^2 + x^2 = 24. \end{cases}$$

Решая систему получаем $y = 3-\sqrt{3}$, $x = 3-\sqrt{3}$. Тогда $\angle EBC = \angle BCA = 45°$, $EC = 3\sqrt{2}$, $\angle FCA = \arccos\dfrac{OE}{OC} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = 30°$, $\angle ABE = 30°$, $\angle DFE = 90°$, $FE = BC\cos 60° = 3$.

$\angle FED = 30°$, $h = FE\sin 30° = 1{,}5$. Ответ: 1,5.



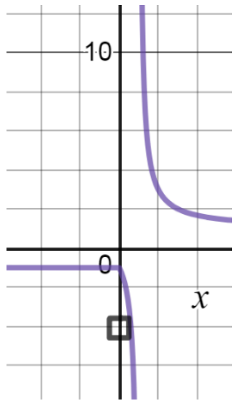
8. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+1}{|x|-1}, \\ |x+y+a| + |x-y-a| = 1. \end{cases}$$

имеет единственное решение. В ответе укажите наименьшее среди всех полученных значение параметра a. (16 баллов)

Решение. Решим данную систему уравнений графически.

Построим графики функций а) $y = \dfrac{x+1}{|x|-1}$ и б) $|x+y+a| + |x-y-a| = 1$.



а) $y = \dfrac{x+1}{|x|-1} = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}, & \text{при } x \ge 0, \\ \dfrac{x+1}{-x-1} = -1, & \text{при } x < 0. \end{cases}$

б) $|x+y+a| + |x-y-a| = 1$ - квадрат со стороной, длина которого равна 1, центр движется по прямой $x = 0$.

Общих точки у квадрата и правой части первого графика при $x>1$ нет, т.к. в данной задаче $|x| \le 1/2$ всегда, что следует из второго уравнения. С левой ветвью при $y > -1$ нет пересечений,

Подставим $y = -1$. ($x < 0$) Получим

$$|x-1+a| + |x+1-a| \le 1 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \ge -1/2, \\ x \le 1/2, \end{array}\right. \text{ при } |2(1-a)| < 1 \\ a-1 \le x \le 1-a, \; |2(1-a)| = 1 \\ \text{нет решений, } \quad |2(1-a)| > 1 \end{array}\right.$$

, следовательно при $a = 1/2$ и 3/2 получаем в виде решения целый отрезок.

При $-3 < y < -1$ два пересечения, при $y = -3$ единственная общая точка (0.5, -3).

При этом значение параметра a можно получить, подставив координаты общей точки во второе уравнение системы: $|-3+a| + |3-a| = 1 \Rightarrow a = 3 + 1/2 = 3.5$ (Второе значение 2.5 не подходит, т.к. при этом будет 2 решения.)

Ответ: $3{,}5$.

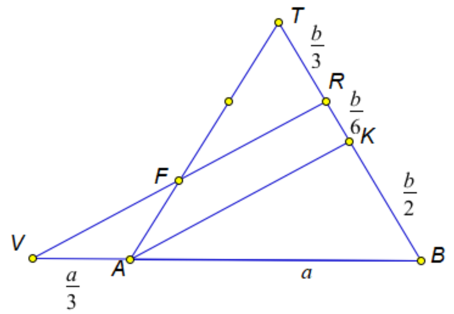
9. Дана правильная четырехугольная пирамида *TABCD* с основанием *ABCD*, причем *AB* = 9/2. На ее высоте *TO* выбрана точка T_1 так, что $TT_1 = TO/3$. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 делят отрезки *OA*, *OB*, *OC* и *OD*, соответственно, в отношении $1:2$, считая от точки *O*. Найдите площадь сечения пирамиды $T_1A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной медиане *AK* боковой грани *TAB*, проходящей через середину ребра *TC* и точку *F* отрезка *TA* такую, что $AF:FT = 1:2$, если известно, что расстояние от точки *C* до этой плоскости сечения равно $4\sqrt{5/13}$. Результат округлите до сотых по правилам округления. (16 баллов)

Решение. Пусть α - плоскость сечения, ρ - расстояние от точки *C* до этой плоскости сечения, *a* – сторона основания пирамиды *TABCD*, φ - угол между плоскостью сечения и основанием пирамиды. $\rho = 4\sqrt{\dfrac{5}{13}}$.

1. Построение сечения $T_1A_1B_1C_1D_1$

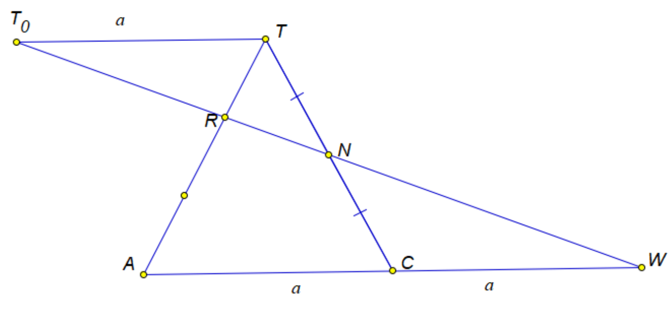
1) *R* – точка пересечения плоскости сечения α с *BT*

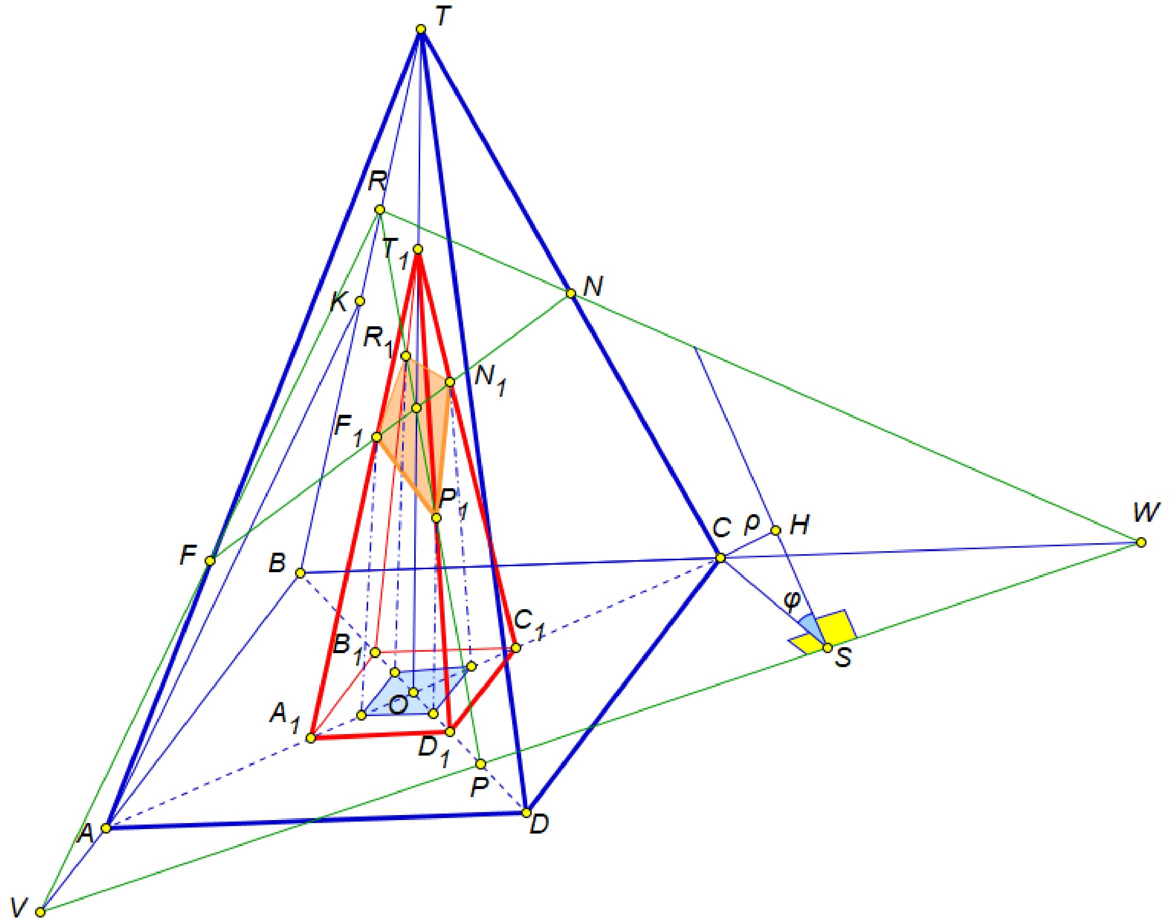
$FR \parallel AK$, $TB = b$, $TR:RB = 1:2$, $VA = a/3$



2) *W* – точка пересечения плоскости сечения α с *BC*

$TN = b/2$, $BC:CW = 1:1$, $CW = a$.

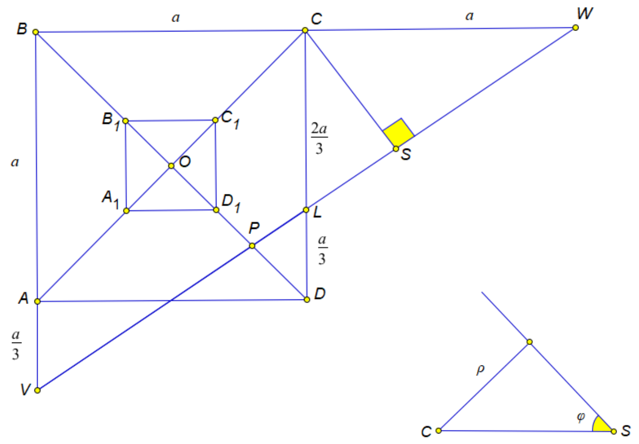




3) P – точка пересечения BD с VW (прямая пересечения плоскости сечения с плоскостью основания) $BP:PD = 4:1,\ PD = \frac{1}{5}BD = \frac{a\sqrt{2}}{5}$,

$$D_1P = \frac{2}{15}BD = \frac{2\sqrt{2}}{15}a.$$

4) $\sin\varphi = \frac{\rho}{CS}$, $\quad CS = \frac{2a}{\sqrt{13}}$, $\quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{4a^2 - 13\rho^2}}{2a}$.

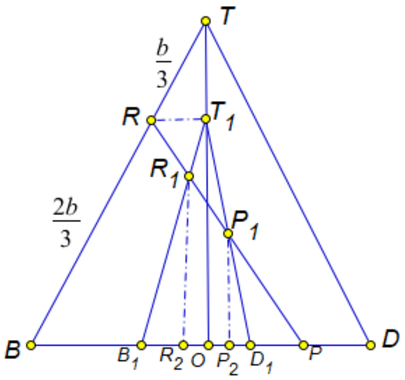


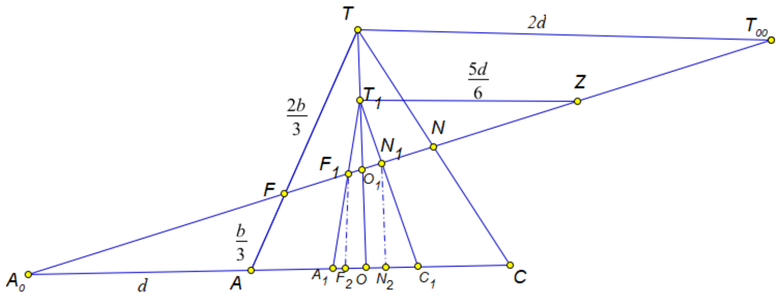
4) R_1 и P_1 – точки пересечения ребер T_1B_1 и T_1D_1 с плоскостью сечения α

$$\frac{R_1T_1}{R_1B_1} = \frac{RT_1}{B_1P},\ RT_1 = \frac{1}{3}BO = \frac{1}{6}BD,\ B_1P = \frac{7}{15}BD,\ \frac{R_1T_1}{R_1B_1} = \frac{5}{14},\ \frac{R_1T_1}{T_1B_1} = \frac{5}{19}.$$

R_2 - проекция R_1 на плоскость основания, $\frac{OR_2}{OB_1} = \frac{5}{19}$, $\quad OR_2 = \frac{5}{19}\cdot\frac{BD}{6} = \frac{5\sqrt{2}a}{19\cdot 6}$.

P_2 - проекция P_1 на плоскость основания, $\frac{T_1P_1}{P_1D_1}=\frac{RT_1}{D_1P}$, $\frac{T_1P_1}{P_1D_1}=\frac{5}{4}$, $\frac{T_1P_1}{T_1D_1}=\frac{5}{9}$, $\frac{OP_2}{OD_1}=\frac{5}{9}$, $OP_2=\frac{5}{9}\cdot\frac{BD}{6}=\frac{5\sqrt{2}a}{9\cdot 6}$. $R_2P_2=\frac{70\sqrt{2}a}{19\cdot 27}$.





$TT_{00}\parallel A_0A$, $A_0A=d$, $TT_{00}=2d$, $A_0C=TT_{00}=2d$, $AC=d$.

O_1 - точка пересечения A_0T_{00} и TO, $\frac{OO_1}{TO_1}=\frac{3}{4}$, $TO_1=\frac{4}{7}TO$, $T_1O_1=\frac{5}{21}TO$.

$T_1Z\parallel A_0A$, $\frac{A_0O}{T_1Z}=\frac{OO_1}{T_1O_1}=\frac{9}{5}$, $T_1Z=\frac{5}{6}d$. $\frac{T_1F_1}{A_1F_1}=\frac{T_1Z}{A_0A_1}=\frac{5}{8}$, $\frac{T_1F_1}{T_1A_1}=\frac{5}{13}$. $\frac{T_1N_1}{C_1N_1}=\frac{T_1Z}{A_0C_1}=\frac{1}{2}$, $\frac{T_1N_1}{T_1C_1}=\frac{1}{3}$.

F_2 - проекция F_1 на плоскость основания, $\frac{OF_2}{OA_1}=\frac{5}{13}$, $OF_2=\frac{5}{13}\cdot\frac{BD}{6}=\frac{5\sqrt{2}a}{13\cdot 6}$.

N_2 - проекция N_1 на плоскость основания, $\frac{ON_2}{OC_1}=\frac{1}{3}$, $ON_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{BD}{6}=\frac{\sqrt{2}a}{3\cdot 6}$.

$F_2N_2=\frac{14\sqrt{2}a}{9\cdot 13}$.

2. Площадь сечения $F_1R_1N_1P_1$

$$S_{сеч}=\frac{S_{пр}}{\cos\varphi}=\frac{S_{F_2R_2N_2P_2}}{\cos\varphi}=\frac{F_2N_2\cdot R_2P_2}{2\cos\varphi}=\frac{3\cdot 49\cdot 5\cdot 8a^3}{9^3\cdot 13\cdot 19\sqrt{4a^2-13\rho^2}}.$$

$a=9/2$, $\rho=4\sqrt{\frac{5}{13}}$, $S_{сеч}=\frac{3\cdot 49\cdot 5\cdot 8a^3}{9^3\cdot 13\cdot 19\sqrt{4a^2-13\rho^2}}=\frac{735}{247}\approx 2{,}98$. Ответ: 2,98.