Вариант № 2

1. Сосуд емкостью 10 л наполнен воздухом, содержащим 24% кислорода. Из сосуда откачали некоторый объем воздуха и добавили такой же объем аргона, после чего откачали такой же, как в первый раз, объем смеси и опять дополнили таким же объемом аргона. В новой смеси оказалось 11,76% кислорода. Сколько литров смеси выпускалось каждый раз из сосуда? Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

2. Решите уравнение $\cos(\pi x^2)-\cos^2\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right)+1+\cos(\pi x^2-4\pi x)=\sin^2\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right)$. В ответе укажите третий член возрастающей последовательности всех положительных корней уравнения. (5 баллов)

3. Найдите наименьшее расстояние от точки с координатами (5; 10; 13) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют неравенству

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)\geq 4{,}5\sqrt[4]{1-(2y+x)^2}.$$

В ответ запишите квадрат найденного расстояния. (6 баллов)

4. Сколькими способами прямоугольную доску размера 2×18 можно покрыть одинаковыми прямоугольными плитками размера 1×2? Плитки должны быть уложены так, чтобы они целиком помещались на доске и не перекрывались. (12 баллов)

5. Определите наименьшее натуральное число N, среди делителей которого имеются все числа вида $x+y$, где x и y являются натуральными решениями уравнения $6xy-y^2-5x^2=7$. (12 баллов)

6. Какое наибольшее значение может принимать площадь прямоугольного треугольника, одна вершина которого совпадает с началом координат, другая лежит на кривой $x^2+y^2=2(x+y)$, а вершина прямого угла расположена на прямой $y=x$? В ответ запишите квадрат найденной площади. (12 баллов)

7. В треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Длина стороны AC равна $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. Расстояния от центра вписанной в треугольник DEF окружности до точек A и C равны 2 и $2\sqrt{2}$, соответственно. Найдите радиус описанной около треугольника DEF окружности. (16 баллов)

8. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{|x|-1}, \\ |x+y|+|x-y-2a|=1. \end{cases}$$

имеет единственное решение. В ответе укажите наименьшее среди всех полученных значение параметра a. (16 баллов)

9. Дана правильная четырехугольная пирамида $TABCD$ с основанием $ABCD$, причем $AB=9/2$. На ее высоте TO выбрана точка T_1 так, что $TT_1=TO/3$. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 делят отрезки OA, OB, OC и OD, соответственно, в отношении $1:2$, считая от точки O. Найдите площадь сечения пирамиды $T_1A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной медиане AK боковой грани TAB, проходящей через середину ребра TC и точку F отрезка TA такую, что $AF:FT=1:2$, если известно, что расстояние от точки B до этой плоскости сечения равно $8\sqrt{5/13}$. Результат округлите до сотых по правилам округления. (16 баллов)

Решения заданий варианта № 2

1. Сосуд емкостью 10 л наполнен воздухом, содержащим 24% кислорода. Из сосуда откачали некоторый объем воздуха и добавили такой же объем аргона, после чего откачали такой же, как в первый раз, объем смеси и опять дополнили таким же объемом аргона. В новой смеси оказалось 11,76% кислорода. Сколько литров смеси выпускалось каждый раз из сосуда? Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

Решение. Пусть x *л* смеси выпускалось каждый раз их сосуда. Тогда в первый раз кислорода в сосуде осталось $2,4-0,24x.$ Процентное содержание кислорода в смеси после добавления аргона составило $(2,4-0,24x)10.$ Второй раз кислорода в сосуде осталось $2,4-0,24x-(2,4-0,24x)0,1x.$ Процентное содержание кислорода в этом случае в смеси после добавления аргона составило $10(2,4-0,24x-(2,4-0,24x)0,1x).$ По условию $10(2,4-0,24x-(2,4-0,24x)0,1x)=11,76.$ Решая уравнение, приходим к квадратному уравнению $x^2-20x+51=0,\ x_1=3,\ x_2=17.$ Второй корень не подходит по условию. Ответ: 3.

2. Решите уравнение $\cos(\pi x^2)-\cos^2\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right)+1+\cos(\pi x^2-4\pi x)=\sin^2\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right)$. В ответе укажите третий член возрастающей последовательности всех положительных корней уравнения. (5 баллов)

Решение. Учитывая основное тригонометрическое тождество, получаем

$$\cos(\pi x^2)+\cos(\pi x^2-4\pi x)=0 \quad\Rightarrow\quad 2\cos(\pi x^2-2\pi x)\cos(2\pi x)=0.$$

Следовательно, $\left[\begin{array}{l}\cos(\pi x^2-2\pi x)=0,\\ \cos(2\pi x)=0,\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\pi x^2-2\pi x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,\\ 2\pi x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-2x-\dfrac{1}{2}+k=0,\ k\in Z,\\ x=\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{2},\ n\in Z,\end{array}\right.$

Решая первое уравнение, получим $x=1\pm\sqrt{k+3/2}$, и тогда последовательность положительных корней уравнения будет такова:

$$0.25;\ \frac{2-\sqrt{2}}{2};\ 0.75;\ 1,25;\ \frac{\sqrt{13}-1}{2};\ 1,5;\ 1+\sqrt{1/2},\ \ldots$$

Ответ: 0.75

3. Найдите наименьшее расстояние от точки с координатами (5; 10; 13) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют неравенству

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)\geq 4,5\sqrt[4]{1-(2y+x)^2}.$$

В ответ запишите квадрат найденного расстояния. (6 баллов)

Решение. Используем неравенство Коши $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$, которое выполняется для всех положительных значений a, b, c. Тогда $((x+y)+(y+z)+(z+x))\geq 3\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}$, $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{(x+y)(y+z)(z+x)}}$. Поскольку все части неравенств положительны. то $(2x+2y+2z)\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}\right)\geq 9\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)\cdot\dfrac{1}{(x+y)(y+x)(z+x)}}=9.$ Выражение $4,5\sqrt{1-(2y+x)^2}\leq 4,5$ для всех возможных значений x и y. Исходное неравенство справедливо для всех положительных z и всех положительных x и y, для которых выполняется неравенство $1-(2y+x)^2\geq 0.$ Таким образом, наименьшее расстояние от точки с координатами (5; 10; 13) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют исходному неравенству, равно расстоянию от точки (5; 10) в плоскости Oxy до прямой $2y+x=1$. Это расстояние в квадрате равно 115,2. Ответ: 115,2.

4. Сколькими способами прямоугольную доску размера 2×18 можно покрыть одинаковыми прямоугольными плитками размера 1×2? Плитки должны быть уложены так, чтобы они целиком помещались на доске и не перекрывались. (12 баллов)

Решение. Пусть имеется доска размером $2\times n$. Обозначим количество способов укладки плитками размера 1×2 через P_n. Тогда верна следующая рекуррентная формула $P_n=P_{n-1}+P_{n-2}$. Поскольку $P_1=1, P_2=2,$ проводя последовательные вычисления по рекуррентной формуле приходим к ответу $P_{18}=4181$. Ответ: 4181.

5. Определите наименьшее натуральное число N, среди делителей которого имеются все числа вида $x+y$, где x и y являются натуральными решениями уравнения $6xy-y^2-5x^2=7$. (12 баллов)

Решение. Преобразуем уравнение, разложив правую часть на множители

$$6xy-y^2-5x^2-x^2+x^2=7 \Rightarrow 6x(y-x)-(y+x)(y-x)=7 \Rightarrow (y-x)(6x-y-x)=7 \Rightarrow$$
$$(y-x)(5x-y)=7.$$

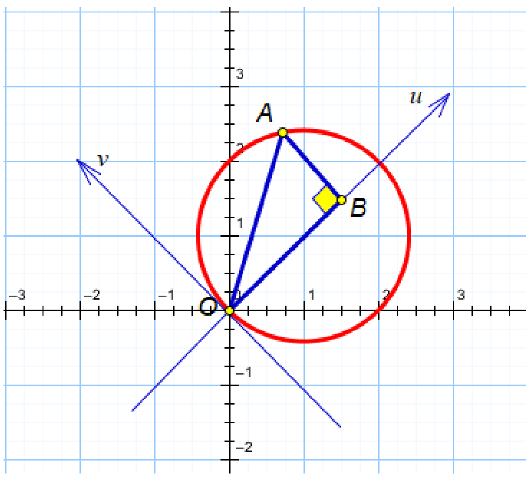
Учитывая, что переменные являются натуральными числами, а 7 – простое число, получим

$$\begin{cases} y-x=7, \\ 5x-y=1, \end{cases} \text{или} \begin{cases} y-x=-7, \\ 5x-y=-1, \end{cases} \text{или} \begin{cases} y-x=1, \\ 5x-y=7, \end{cases} \text{или} \begin{cases} y-x=-1, \\ 5x-y=-7, \end{cases}$$

вторая и четвертая системы не имеют натуральных решений. Решением первой системы является пара (2; 9), третьей – (2; 3). Значит, $x+y=11$ или $x+y=5$. И наименьшим натуральным числом, среди делителей которого имеются 5 и 11, является 55.

Ответ: 55.

6. Какое наибольшее значение может принимать площадь прямоугольного треугольника, одна вершина которого совпадает с началом координат, другая лежит на кривой $x^2+y^2=2(x+y)$, а вершина прямого угла расположена на прямой $y=x$? В ответ запишите квадрат найденной площади. (12 баллов)



Решение. $x^2+y^2-2x-2y=0, \quad (x-1)^2+(y-1)^2=2.$

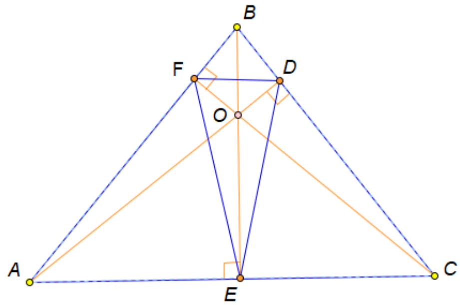
Имеем уравнение окружности с центром в точке (1; 1) и радиусом $R=\sqrt{2}$. Перейдем к системе координат Ouv с сохранением масштаба (см. рис.). Уравнение окружности в этой системе координат $(u-\sqrt{2})^2+v^2=2.$ Площадь прямоугольного треугольника, одна вершина которого совпадает с началом координат, другая лежит на окружности, а вершина прямого угла расположена на прямой $v=0$, вычисляется по формуле $S_{OAB}=\frac{1}{2}u\cdot|v|=\frac{1}{2}u\sqrt{2\sqrt{2}u-u^2}$, где вершина $A(u,v)$ лежит на окружности, вершина прямого угла $B(u,0)$. Имеем $S^2=\frac{1}{4}(2\sqrt{2}u^3-u^4)$. Находим нули производной этой функции

$\left(S^2\right)'(u)=\dfrac{u^2}{2}(3\sqrt{2}-2u)$. Единственной точкой экстремума, а именно, точкой максимума для этой функции является точка $u=3\sqrt{2}/2$, $S_{\max}=S(3/\sqrt{2})=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, $S^2_{\max}==\dfrac{27}{16}=1,6875$,

Ответ: 1,6875.

7. В треугольнике *ABC* проведены высоты *AD, BE, CF*. Длина стороны *AC* равна $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. Расстояния от центра вписанной в треугольник *DEF* окружности до точек *A* и *C* равны 2 и $2\sqrt{2}$, соответственно. Найдите радиус описанной около треугольника *DEF* окружности. (16 баллов)

Решение. AD, BE, CF - высоты треугольника ABC, DA, EB, FC биссектрисы углов D, E, F треугольника DEF, O - точка пересечения высот треугольника ABC, она же является центром вписанной в треугольник DEF окружности. Таким образом, $AO=2, CO=2\sqrt{2}$. Пусть $OE=x, AE=y$. Тогда приходим к системе $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ (\sqrt{2}+\sqrt{6}-y)^2+x^2=8. \end{cases}$ Решая систему получаем $y=\sqrt{2}, x=\sqrt{2}$. Тогда $\angle DAC=\angle BCA=45°$, $BC=2\sqrt{3}$, $\angle FCA=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=30°$, $\angle ABE=30°$, $AB=2\sqrt{2}$. $\angle DFE=90°$, $DE=AB\cos 45°=2$. $R_{оп.}=DE/2=1$. Ответ: 1.



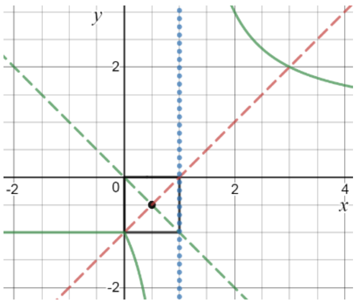
8. Найдите все значения параметра *a*, при которых система

$$\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{|x|-1}, \\ |x+y|+|x-y-2a|=1. \end{cases}$$

имеет единственное решение. В ответе укажите наименьшее среди всех полученных значение параметра *a*. (16 баллов)

Решение. Решим данную систему уравнений графически.

Построим графики функций а) $y=\dfrac{x+1}{|x|-1}$ и б) $|x+y|+|x-y-2a|=1$.



а) $y=\dfrac{x+1}{|x|-1}=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}, & \text{при } x\ge 0, \\ \dfrac{x+1}{-x-1}=-1, & \text{при } x<0. \end{cases}$

б) $|x+y|+|x-y-2a|=1$ - квадрат со стороной, длина которого равна 1, центр движется по прямой $y=-x$.

Общих точки у квадрата и правой части первого графика при $x>1$ нет. С левой ветвью единственная общая точка (0, -1). При этом значение параметра *a* можно получить, подставив координаты общей точки во второе уравнение системы: $|-1|+|1-2a|=1 \Rightarrow a=1/2$.

2 способ. Рассмотрим $x<0$, при этом $y=-1$. Заметим, что в данной задаче $|x+y|\le 1$ всегда, что следует из второго уравнения. Подставим $y=-1$. Получим $|x-1|\le 1 \Rightarrow -1\le x-1\le 1 \Rightarrow 0\le x\le 2$, что невозможно в силу отрицательности *x*.

Рассмотрим $x \geq 0$. При этом $y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$. Подставив в первый модуль второго уравнения, получим $-1 \leq x + 1 + \frac{2}{x-1} \leq 1, \Rightarrow -2 \leq \frac{x^2 - x + 2}{x-1} \leq 0.$ Числитель дроби всегда положителен, следовательно дробь меньше нуля может быть только при $x < 1$.

Тогда $\begin{cases} 0 \leq x < 1, \\ -2 \leq \frac{x^2 - x + 2}{x-1}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1, \\ 0 \leq \frac{x^2 - x + 2 + 2x - 2}{x-1}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1, \\ 0 \leq \frac{x^2 + x}{x-1}, \end{cases} \Rightarrow x = 0.$

При этом $y = -1$, подставив координаты точки во второе уравнение системы, находим параметр:
$|-1| + |1 - 2a| = 1 \Rightarrow a = 1/2.$

Ответ: $0,5$.

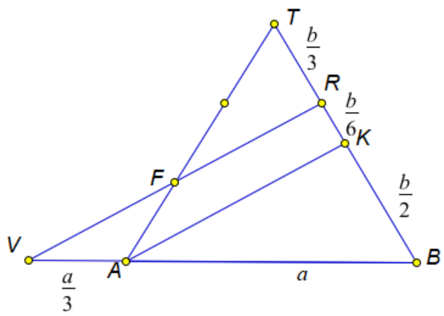
9. Дана правильная четырехугольная пирамида *TABCD* с основанием *ABCD*, причем *AB* = 9/2. На ее высоте *TO* выбрана точка T_1 так, что $TT_1 = TO/3$. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 делят отрезки *OA*, *OB*, *OC* и *OD*, соответственно, в отношении $1:2$, считая от точки *O*. Найдите площадь сечения пирамиды $T_1A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной медиане *AK* боковой грани *TAB*, проходящей через середину ребра *TC* и точку *F* отрезка *TA* такую, что $AF:FT = 1:2$, если известно, что расстояние от точки *B* до этой плоскости сечения равно $8\sqrt{5/13}$. Результат округлите до сотых по правилам округления. (16 баллов)

Решение. Пусть α - плоскость сечения, ρ - расстояние от точки *C* до этой плоскости сечения, *a* – сторона основания пирамиды *TABCD*, φ - угол между плоскостью сечения и основанием пирамиды. Отметим, что расстояние от точки *B* до плоскости α равно 2ρ, $\rho = 4\sqrt{\frac{5}{13}}$.

1. Построение сечения $T_1A_1B_1C_1D_1$

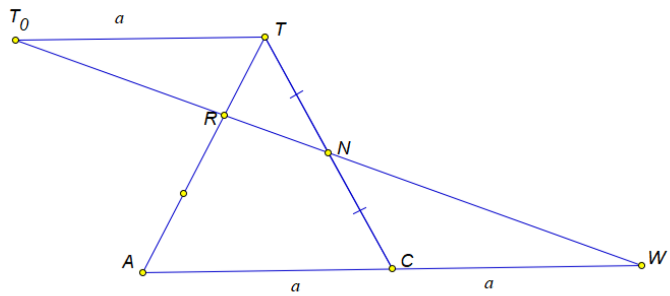
1) *R* – точка пересечения плоскости сечения α с *BT*

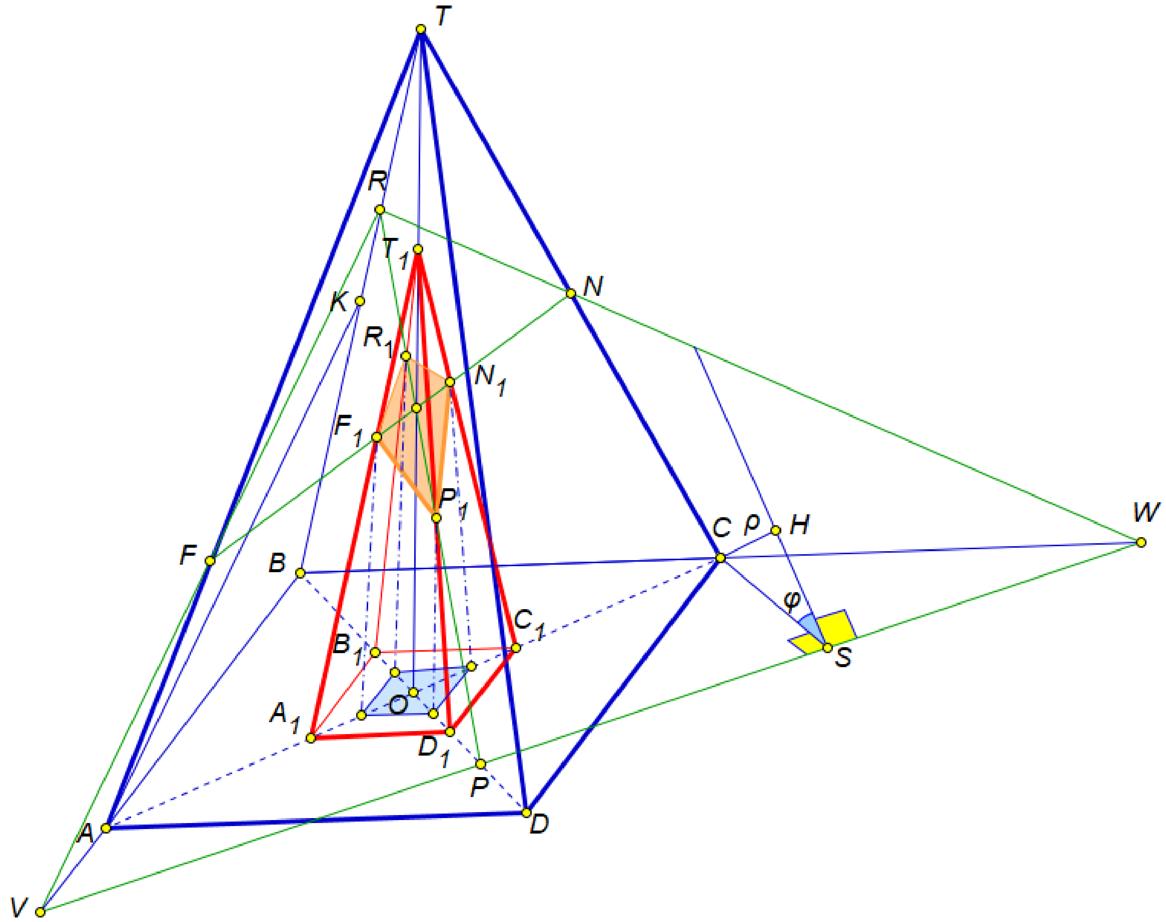
$FR \parallel AK$, $TB = b$, $TR:RB = 1:2$, $VA = a/3$



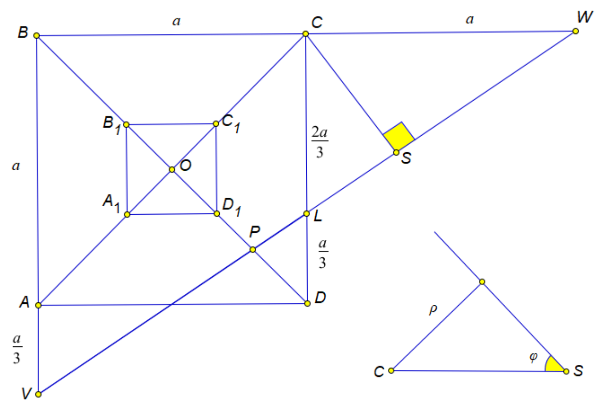
2) *W* – точка пересечения плоскости сечения α с *BC*

$TN = b/2$, $BC:CW = 1:1$, $CW = a$.





3) P – точка пересечения BD с VW (прямая пересечения плоскости сечения с плоскостью основания) $BP:PD=4:1,\ PD=\dfrac{1}{5}BD=\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$,



$$D_1P=\frac{2}{15}BD=\frac{2\sqrt{2}}{15}a.$$

4) $\sin\varphi=\dfrac{\rho}{CS},\quad CS=\dfrac{2a}{\sqrt{13}},\quad \cos\varphi=\dfrac{\sqrt{4a^2-13\rho^2}}{2a}.$

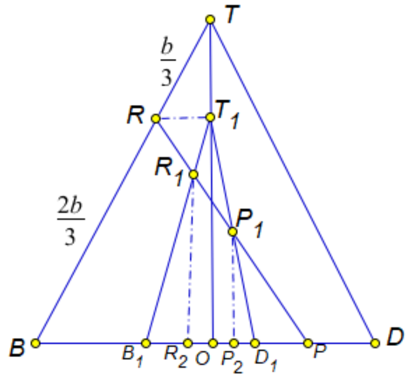
4) R_1 и P_1 – точки пересечения ребер T_1B_1 и T_1D_1 с плоскостью сечения α

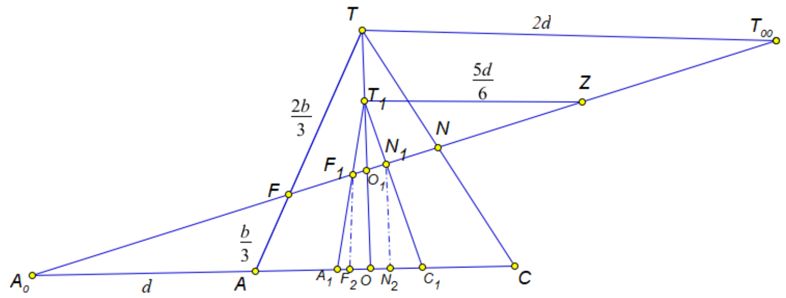
$$\frac{R_1T_1}{R_1B_1}=\frac{RT_1}{B_1P},\ RT_1=\frac{1}{3}BO=\frac{1}{6}BD,\ B_1P=\frac{7}{15}BD,\ \frac{R_1T_1}{R_1B_1}=\frac{5}{14},\ \frac{R_1T_1}{T_1B_1}=\frac{5}{19}.$$

R_2 - проекция R_1 на плоскость основания, $\dfrac{OR_2}{OB_1}=\dfrac{5}{19},\quad OR_2=\dfrac{5}{19}\cdot\dfrac{BD}{6}=\dfrac{5\sqrt{2}a}{19\cdot 6}.$

P_2 - проекция P_1 на плоскость основания, $\dfrac{T_1P_1}{P_1D_1}=\dfrac{RT_1}{D_1P},\ \dfrac{T_1P_1}{P_1D_1}=\dfrac{5}{4},\ \dfrac{T_1P_1}{T_1D_1}=\dfrac{5}{9},$

$\dfrac{OP_2}{OD_1}=\dfrac{5}{9},\quad OP_2=\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{BD}{6}=\dfrac{5\sqrt{2}a}{9\cdot 6}.\quad R_2P_2=\dfrac{70\sqrt{2}a}{19\cdot 27}.$





$TT_{00} \parallel A_0A,\quad A_0A = d,\quad TT_{00} = 2d,\ A_0C = TT_{00} = 2d,\quad AC = d$.

O_1 - точка пересечения A_0T_{00} и TO, $\dfrac{OO_1}{TO_1} = \dfrac{3}{4}$, $\quad TO_1 = \dfrac{4}{7}TO$, $\quad T_1O_1 = \dfrac{5}{21}TO.$

$T_1Z \parallel A_0A$, $\dfrac{A_0O}{T_1Z} = \dfrac{OO_1}{T_1O_1} = \dfrac{9}{5}$, $\quad T_1Z = \dfrac{5}{6}d$. $\dfrac{T_1F_1}{A_1F_1} = \dfrac{T_1Z}{A_0A_1} = \dfrac{5}{8}$, $\quad \dfrac{T_1F_1}{T_1A_1} = \dfrac{5}{13}$. $\dfrac{T_1N_1}{C_1N_1} = \dfrac{T_1Z}{A_0C_1} = \dfrac{1}{2}$, $\quad \dfrac{T_1N_1}{T_1C_1} = \dfrac{1}{3}$.

F_2 - проекция F_1 на плоскость основания, $\dfrac{OF_2}{OA_1} = \dfrac{5}{13}$, $\quad OF_2 = \dfrac{5}{13}\cdot\dfrac{BD}{6} = \dfrac{5\sqrt{2}a}{13\cdot 6}$.

N_2 - проекция N_1 на плоскость основания, $\dfrac{ON_2}{OC_1} = \dfrac{1}{3}$, $\quad ON_2 = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{BD}{6} = \dfrac{\sqrt{2}a}{3\cdot 6}$.

$$F_2N_2 = \frac{14\sqrt{2}a}{9\cdot 13}.$$

2. Площадь сечения $F_1R_1N_1P_1$

$$S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\varphi} = \frac{S_{F_2R_2N_2P_2}}{\cos\varphi} = \frac{F_2N_2\cdot R_2P_2}{2\cos\varphi} = \frac{3\cdot 49\cdot 5\cdot 8a^3}{9^3\cdot 13\cdot 19\sqrt{4a^2 - 13\rho^2}}.$$

$a = 9/2,\quad \rho = 4\sqrt{\dfrac{5}{13}},\quad S_{сеч} = \dfrac{3\cdot 49\cdot 5\cdot 8a^3}{9^3\cdot 13\cdot 19\sqrt{4a^2 - 13\rho^2}} = \dfrac{735}{247} \approx 2{,}98.$ Ответ: 2,98.